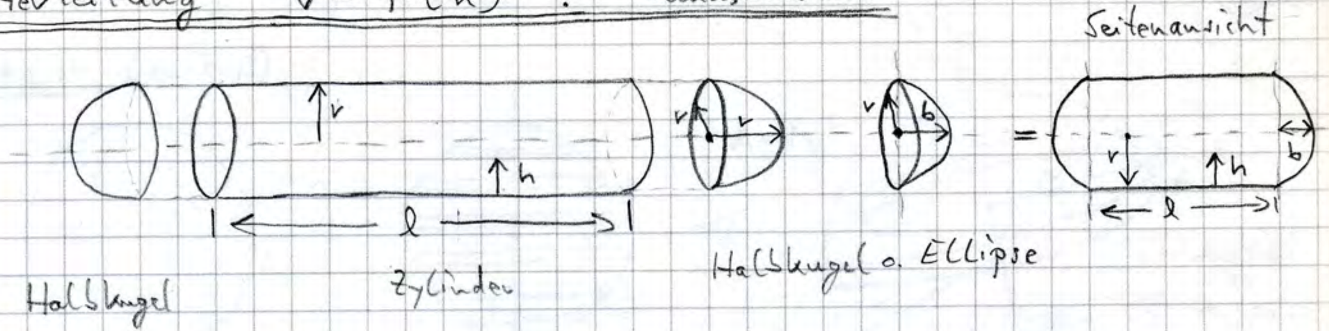
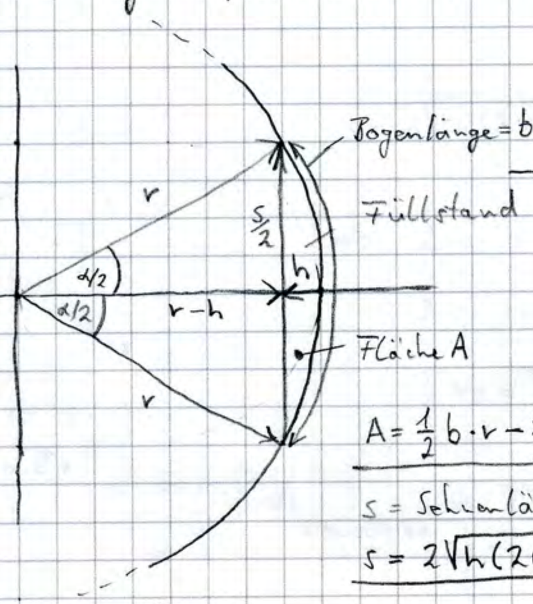
Herleitung $V = f(h)$? Tankfüllstand

Ⓐ



Tank wird durch Zylinder mit 2 Halbkugeln oder besser 2 Ellipsen als Seitenwände dargestellt. (Auch Parabel oder Hyperbel möglich)

(1) Berechnung Zylindervolumen als Fkt. von h



Bogenlänge $= b = \dfrac{\alpha \cdot \pi \cdot r}{180°}$ I

$r \cdot \cos\frac{\alpha}{2} = r - h$ II

$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{r-h}{r}$

$\frac{\alpha}{2} = \arccos \frac{r-h}{r}$

$\alpha = 2 \cdot \arccos \frac{r-h}{r}$

$\alpha = 2 \cdot \arccos\left(1 - \frac{h}{r}\right)$

$A = \frac{1}{2} b \cdot r - \frac{1}{2} s (r-h)$ III

s = Sehnenlänge

$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$ IV

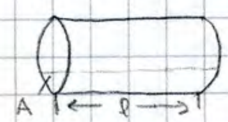
II in I eingesetzt ⇒

$$b = \frac{2 \cdot \arccos\left(1-\frac{h}{r}\right) \cdot \pi \cdot r}{180°}$$

in III eingesetzt: (mit IV)

$$A = \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \frac{\cancel{2}\arccos\left(1-\frac{h}{r}\right) \cdot \pi \cdot r}{180°} \cdot r - \frac{1}{\cancel{2}} \cdot \cancel{2}\sqrt{h(2r-h)} \cdot (r-h)$$

$$A = \frac{\arccos\left(1-\frac{h}{r}\right) \cdot \pi r^2}{180°} - (r-h) \cdot \sqrt{h(2r-h)}$$



$V = A \cdot l$

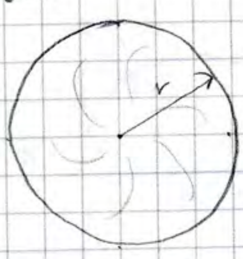
Winkel in Radiant: $2\pi = 360°$, $\pi = 180°$

$$V_{Zyl.} = l \cdot \left(\arccos\left(1 - \frac{h_x}{r}\right) \cdot r^2 - (r-h_x) \cdot \sqrt{h_x(2r-h_x)} \right)$$

(2) Berechnung Kugelvolumen als Fkt. von h

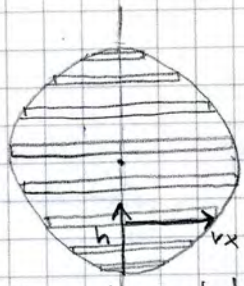
(B)

__1. Weg:__ (zu Fuß)



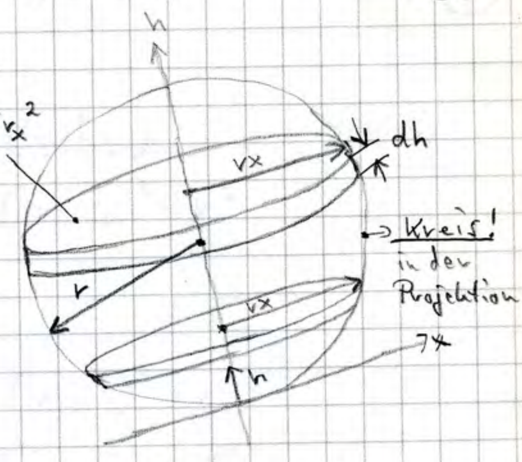
Kugel
$V = \frac{\pi \cdot d^3}{6}$

$\Rightarrow$



Σ von Kreisscheiben

$\Rightarrow$

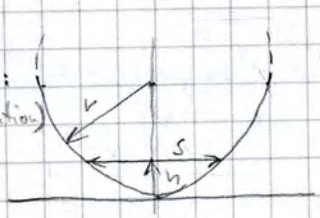


$V_{Kreisscheibe} = \pi r_x^2 \cdot dh$

$r_x = f(h)$!

Bestimmung von $r_x = f(h)$:

Kreis:
(aus Projektion)



$s = 2\sqrt{h(2r-h)}$ I (Kreisabschnitt) (Sehnenlänge)

$\Rightarrow \quad 2 \cdot r_x = s$

$\cancel{2} r_x = \cancel{2}\sqrt{h(2r-h)}$

$r_x = \sqrt{h(2r-h)}$

Kreisfläche:
$A = \pi r^2$

$A_{Kreisscheibe} = \pi \cdot r_x^2 = \pi \cdot \left(\sqrt{h(2r-h)}\right)^2$

$= \underline{\pi \cdot h\,(2r-h)}$

$V_{Kreisscheibe} = A_{Kreisscheibe} \cdot dh$

V_{Kugel} = Summe aller $V_{Kreisscheiben}$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad V_{Kugel} = \int_0^{h_x} \left(\pi \cdot h(2r-h)\right) dh$$

$$= \int_0^{h_x} (2\pi r \cdot h - \pi h^2)\, dh$$

$$= \int_0^{h_x} 2\pi r h\, dh - \int_0^{h_x} \pi h^2\, dh$$

$$= 2\pi r\, \frac{1}{2} h^2 \Big|_0^{h_x} - \pi\, \frac{1}{3} h^3 \Big|_0^{h_x}$$

$$\underline{\underline{V_{Kugel} = \pi r h_x^2 - \frac{1}{3}\pi h_x^3}}$$

2 · Halbkugel = Kugel !

Probe:

Kugel: $h = 2r$

$V = \pi r (2r)^2 - \frac{1}{3}\pi (2r)^3$

$= \pi 4 r^3 - \frac{1}{3}\pi 8 r^3$

$= 4\pi r^3 - \frac{8}{3}\pi r^3$

$= \frac{12}{3}\pi r^3 - \frac{8}{3}\pi r^3$

$= \frac{4}{3}\pi r^3$

mit $2r = d$
$r = \frac{d}{2}$

$= \frac{4}{3}\pi \left(\frac{d}{2}\right)^3$

$= \frac{4}{3}\pi \cdot \frac{d^3}{8}$

$= \frac{1}{6}\pi d^3$ ✓

Halbkugel $h = r$

$V = \pi r \cdot r^2 - \frac{1}{3}\pi r^3$

$= \pi r^3 - \frac{1}{3}\pi r^3$

$= \frac{2}{3}\pi r^3$

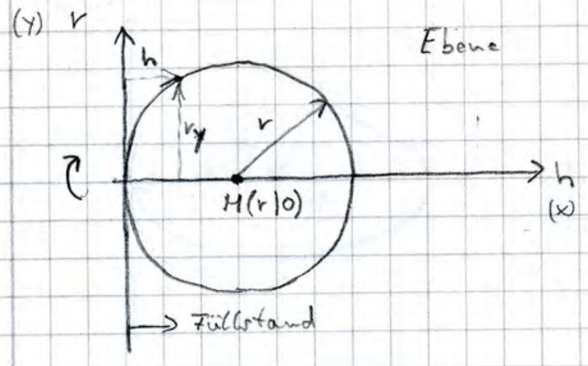
mit $r = \frac{d}{2}$

$= \frac{2}{3}\pi \frac{d^3}{8}$

$= \frac{2}{24}\pi d^3$

$= \frac{1}{12}\pi d^3$ ✓

2. Weg: Rotation eines Kreises um Mittelpunkt ergibt Kugel* ! C



Ebene

allg. Kreisgleichung: M(x_0|y_0)

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$$

hier:

$$(h-r)^2+(r_y-0)^2=r^2$$

$$h^2-2hr\cancel{+r^2}+r_y^2=\cancel{r^2}$$

$$r_y^2=2hr-h^2$$

$$r_y=\sqrt{2hr-h^2} \quad \text{I}$$

r=f(h)

* Rotationsvolumen bei Drehung um x-Achse:
(↳ ≙ Kugel)

$$V=\pi\int_{x_1}^{x_2} y^2\,dx \quad \text{II}$$

I in II eingesetzt:

$$V=\pi\int_0^{h_x}\left(\sqrt{2hr-h^2}\right)^2 dh$$

$$=\pi\int_0^{h_x}(2hr-h^2)\,dh$$

$$=\pi\int_0^{h_x}2rh\,dh-\pi\int_0^{h_x}h^2\,dh$$

$$=2\pi r\tfrac{1}{2}h^2\Big|_0^{h_x}-\tfrac{1}{3}\pi h^3\Big|_0^{h_x}$$

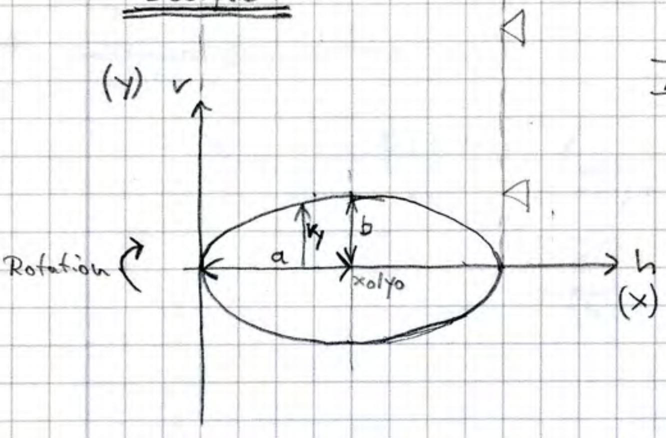
$$V_{Kugel}=\pi r h_x^2-\tfrac{1}{3}\pi h^3$$

gleiches Ergebnis wie Seite B!

Da die Seitenwände besser durch Ellipsenform mathematisch beschrieben werden, folgt die Bestimmung des Rotationsvolumens einer Ellipse.

D

Ellipse:



Ellipsengleichung:

I $\quad \frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$

$y_0=0$

$a=r$

Rotationskörper: (um x-Achse) $y=f(x)$

II $\quad V=\pi\int_{x_1}^{x_2}(y=f(x))^2\,dx$

$$I \Rightarrow \frac{(h_x-r)^2}{r^2}+\frac{(r_y-0)^2}{b^2}=1$$

$$\frac{r_y^2}{b^2}=1-\frac{(h-r)^2}{r^2}$$

$$r_y^2=b^2-b^2\frac{(h-r)^2}{r^2}$$

$$r_y=\sqrt{b^2-b^2\frac{(h-r)^2}{r^2}} \qquad r=f(h)$$

$$II \Rightarrow V=\pi\int_0^{h_x} b^2-b^2\frac{(h-r)^2}{r^2}\,dh$$

$$=\pi\int_0^{h_x}\left[b^2-\frac{b^2}{r^2}\left(h^2-2hr+r^2\right)\right]dh$$

$$=\pi\int_0^{h_x}\cancel{b^2}-\frac{b^2}{r^2}h^2+2\frac{b^2h}{r}-\cancel{b^2}\,dh$$

$$=\pi\int_0^{h_x}2\frac{b^2}{r}\cdot h-\frac{b^2}{r^2}h^2\,dh$$

$$=\pi\left(\cancel{2}\frac{b^2}{r}\cdot\frac{1}{\cancel{2}}h^2-\frac{b^2}{r^2}\cdot\frac{1}{3}h^3\right)\Bigg|_0^{h_x}$$

$$V_{Ellipse}=\pi\left(\frac{b^2}{r}h_x^2-\frac{b^2}{3r^2}h_x^3\right)$$

* in der Berechnungsformel

Probe: für $b=a=r$ muß sich Volumen* für Kreis ergeben:

$$V=\pi\left(\frac{\cancel{r^2}}{\cancel{r}}h_x^2-\frac{\cancel{r^2}}{3\cancel{r^2}}h_x^3\right)$$

$$=\pi r h_x^2-\frac{1}{3}\pi h_x^3 \quad ✓$$

BSP.: $h_x=2r \Rightarrow$ Kugelvolumen $\qquad \left(V_{Kugel}=\frac{\pi d^3}{6}\right)$

$$V=\pi r\cdot(2r)^2-\frac{1}{3}\pi(2r)^3$$

$$=\pi 4r^3-\frac{1}{3}\pi 8r^3$$

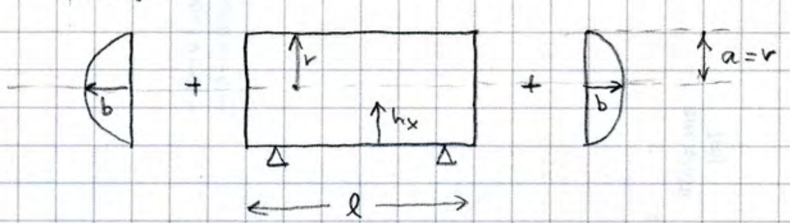
$$=\pi\frac{12}{3}r^3-\pi\frac{8}{3}r^3=\pi\frac{4}{3}r^3 \quad \text{mit } r=\frac{d}{2} \Rightarrow V=\pi\frac{4}{3}\left(\frac{d}{2}\right)^3=\pi\frac{4}{3}\frac{d^3}{8}=\pi\frac{d^3}{6}$$

= ✓

E

Endergebniss:

$$V_{Gesamt} = f(h) = V_{\text{halbe Ellipse}} + V_{\text{Zylinder}} + V_{\text{halbe Ellipse}}$$



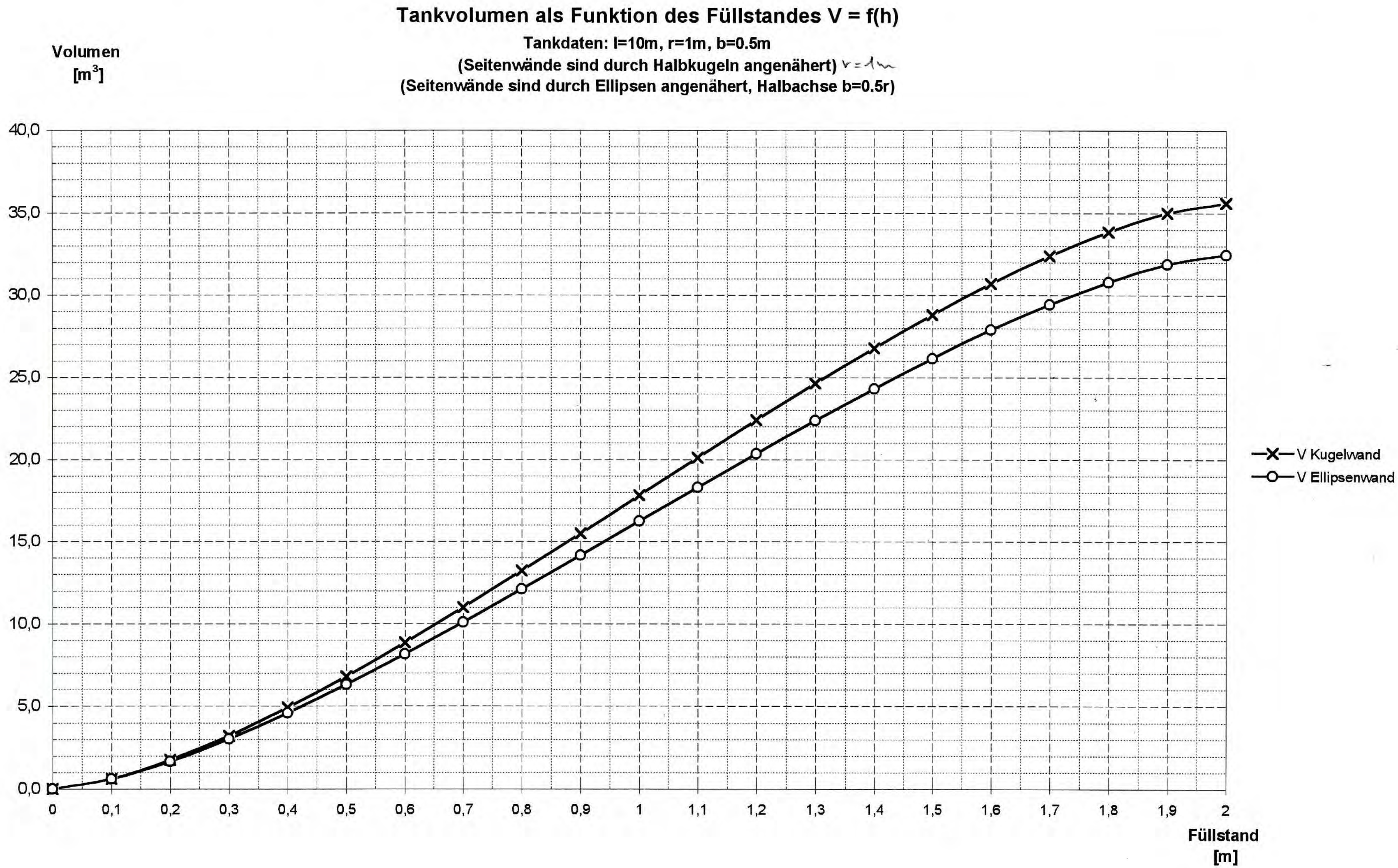
$$\boxed{V = l\cdot\left(\arccos\left(1-\frac{h_x}{r}\right)\cdot r^2 - (r-h_x)\sqrt{h_x(2r-h_x)}\right) + \underbrace{\pi\left(\frac{b^2}{r}h_x^2 - \frac{b^2}{3r^2}h_x^3\right)}_{A}}$$

Seitenwände sind Ellipsen

für: Seitenwände sind (halb) Kugeln, wird Ausdruck A durch

$$\boxed{\ldots + \pi r h_x^2 - \frac{1}{3}\pi h_x^3}$$

ersetzt.



Tankvolumen als Funktion des Füllstandes V = f(h)
Tankdaten: l=10m, r=1m, b=0.5m
(Seitenwände sind durch Halbkugeln angenähert) r=1m
(Seitenwände sind durch Ellipsen angenähert, Halbachse b=0.5r)
Volumen
[m³]
40,0
35,0
30,0
25,0
20,0
15,0
10,0
5,0
0,0
0
0,1
0,2
0,3
0,4
0,5
0,6
0,7
0,8
0,9
1
1,1
1,2
1,3
1,4
1,5
1,6
1,7
1,8
1,9
2
Füllstand
[m]
V Kugelwand
V Ellipsenwand