Übung, Herleitung

Linearisierung von resistiven Sensoren

Inhalt

Schlüsselwörter
Linearisierung, Parallelwiderstand, Wendetangente

Kurzbeschreibung
Durch Hinzufügen eines einzigen elektrischen Widerstandes in Verbindung mit einer stabilen Spannungs- oder Stromquelle kann die Linearität eines Widerstandsaufnehmers verbessert werden. Hier sollen zur Berechnung des zur Linearisierung notwendigen Widerstandes, die Wendetangenten-Methode und die Dreipunkt-Methode betrachtet werden. Im ersten Kapitel wird die tabellarische Zusammenfassung für die Berechnungsformel des Widerstandes angegeben: Einmal nach der Wendetangentenmethode für die Charakteristik eines NTC-Temperatursensors und weiters für eine nichtlineare Sensorcharakteristik entsprechend einem Polynom 2. Grades sowie im zweiten Teil für die Dreipunktmethode. Die Herleitung für den Wert des optimalen Widerstandes für letzteren Sensortyp wird ebenfalls angegeben. In den weiteren Kapiteln folgen Rechenbeispiele für die Linearisierung einer Polynomcharakteristik bzw. eines NTC mit Exponentialcharakteristik. Es wird anhand der Analyse des Verlaufs des Linearitätsfehlers gezeigt, dass bei der Wendetangentenmethode der Linearitätsfehler am Ort des Wendepunkts nicht verschwindet.

Zielgruppe, Voraussetzung
Elektronik Grundkenntnisse vorhanden

1 Methoden: Wendetangente und Dreipunkt

Ein nicht linearer Zusammenhang des Widerstandsverlaufes R(x) als Funktion der Messgrösse x lässt sich auf einfachste Weise durch die Speisung des Sensors mit einer linearen Quelle erreichen. Bekanntlich kann der gewünschte lineare Zusammenhang von Strom und Spannung an den Klemmen eines aktiven Zweipols, sowohl mit einer idealen Spannungsquelle Uq und einem Innenwiderstand Rq oder mit einer idealen Stromquelle Iq einem Parallelleitwert Gq erfolgen, wenn gilt: Gq=1/Rq und Iq=Uq/Rq. (siehe Abb. 1) In beiden Fällen steckt die Information über die Messgrösse x in der Spannung, die über dem Sensorwiderstand gemessen wird.

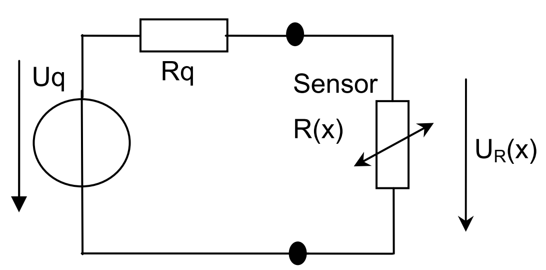

Abb. 1a Sensor gespeist mit Spannungsquelle

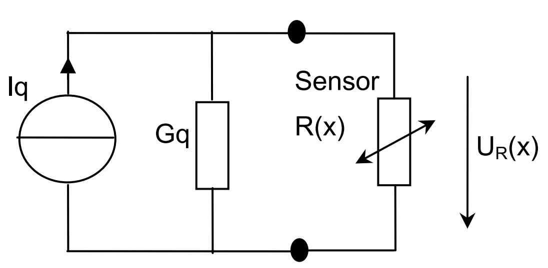

Abb. 1b Sensor gespeist mit Stromquelle

1.1 Wendetangenten-Methode zur Berechnung von Rq

Der Verlauf der Spannung $U_R(x)$ als Funktion der Messgrösse soll seinen Wendepunkt beim zu wählenden Messgrössenwert x_M haben, der typischer weise in der Mitte des zu linearisierenden Bereichs gewählt wird. Dies muss nicht zwingend bedeuten, dass in diesem Punkt auch der Linearitätsfehler exakt NULL ist. (gilt nur näherungsweise!) Zur Dimensionierung von von Rq muss die Funktion R(x) bekannt sein.

Tab. 1 Beispiele zur Anwendung der Wendetangentenmethode

Sensortyp	**Sensorcharakteristik**	**Formel für Rq**
NTC Temperatursensor, x_0 Referenztemperatur	$R(x) = R_0 \cdot e^{B \cdot \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x_0}\right)}$	$Rq = R(x_m)\frac{B - 2 \cdot x_m}{B + 2 \cdot x_m}$
Silizium-Widerstands Temperatursensor (Typ KTY)	$R(x) = a + b \cdot x + c \cdot x^2$	$Rq = 3 \cdot (R(x_M) - a) + \frac{b^2}{c} - a$

1.2 Dreipunkt-Methode zur Berechnung von Rq

Bei dieser Methode wird Rq so gewählt, damit drei Punkte des Verlaufs von $U_R(x)$ auf einer Geraden liegen. Üblicher weise werden dies die Endwerte $U_R(x_1)$ und $U_R(x_3)$ des zu linearisierenden Bereiches sein und ein Wert $U_R(x_2)$ in etwa der Mitte des Bereichs. Dabei verschwindet der Linearitätsfehler im Messwerte x_2 exakt. Zur Dimensionierung werden nur die drei Widerstandswerte R(x) des Sensors bei den drei Messgrössenwerten benötigt (R(x1)=R1). Eine vereinfachte Formel für Rq ergibt sich, wenn x_2 genau in der Mitte zwischen x_1 und x_3 liegt.

Tab. 2 Berechnungsvorschrift für Rq nach der Dreipunkt-Methode

x_2 in der Bereichsmitte	$Rq = \frac{R3 \cdot (R2 - R1) - R1 \cdot (R3 - R2)}{R1 + R3 - 2 \cdot R2}$
x_2 beliebig innerhalb von x_1 , x_3	$Rq = \frac{R1 \cdot R2 \cdot (x2 - x1) - R1 \cdot R3 \cdot (x3 - x1) + R2 \cdot R3 \cdot (x3 - x2)}{R1 \cdot (x3 - x2) - R2 \cdot (x3 - x1) + R3 \cdot (x2 - x1)}$

2 Herleitung mittels Wendetangentenmethode für Polynom Charakteristik

Gesucht ist der Wert des Widerstandes Rq der in der Parallelschaltung (vgl. Abb. 1b) mit dem resistiven Sensor R(x), dessen Charakteristik mit einem Polynom 2. Grades beschrieben wird, eine Linearisierung erreicht.

Lösungsansatz für die Herleitung:
Gesucht ist Rq damit der Wendepunkt des Gesamtwiderstandes Rg beim gewünschten Messgrössenwert x auftritt und somit an diesem Punkt auch der Linearitätsfehler klein bleibt.

Lösung mit dem Software Tool Matlab

```
>> syms a b c Rq x           % symbolisches Rechnen mit Matlab
R=a+b*x+c*x^2                % Temperaturcharakteristik des Sensors mit den Koeffizienten a,b,c
Rg=1/(1/Rq+1/R)              % Gesamtwiderstand R(x) // Rq siehe Abb. 1b
d2Rg=diff(Rg,x,2)            % symbolische Berechnung der zweiten Ableitung
Rq=solve(d2Rg,Rq)            % Nullsetzen der zweiten Ableitung von Rg und Ausklammern von Rq

Rq = (3*c^2*x^2+3*b*c*x-c*a+b^2)/c    % Ergebnis: Rq ist eine Funktion der Koeffizienten a,b,c und von x
```

Die Lösung für den Zahlenwert des gesuchten Widerstandes Rq, damit der Wendepunkt beim Messgrössenwert x zu liegen kommt, lautet nach einer kleinen Umformung des obigen Ergebnisses:

Rq= 3 (R(x) – a) + ((b^2/c) - a)

mit R(x) dem Widerstandswert des Sensors beim Wendepunkt. Dies ist meist die Messbereichsmitte. Für eine Linearisierung bei x=0 entfällt der erste Term in obiger Formel und es verbleibt Rq= **(**b^2/c) - a.

3 Beispiel: Vergleich Dreipunkt mit Wendetangentenmethode für Polynomverlauf

Es ist ein Silizium-Temperatursensor, dessen Widerstandscharakteristik mit einem Polynom 2. Grades beschrieben wird, zu linearisieren. Gesucht ist dabei der Linearitätsfehler innerhalb des gewünschten Messbereichs von 25 °C bis 45 °C. Die Koeffizienten des Temperatursensor RTD KTY10 Sensor sind vom Hersteller wie folgt gegeben:

Widerstandswert bei der Referenztemperatur von 25°C (x=0) beträgt R_{25}=1kOhm.

Die Temperaturkoeffizienten betragen a=1; b=7.88E-3; c=1.937E-5 (normiert auf eine dimensionslose Messgrösse x);

Die Berechnung von Rq für die Linearisierung nach der **Wendetangentenmethode** liefert entsprechend der Formel nach Tab. 1 für x=10 also der Lage des Wendpunkts in der Messbereichsmitte bei 35°C, den Wert von **Rq=2.4479 kOhm**.

Die Lösung für Rq entsprechend der Linearisierung nach der **Dreipunkt-Methode** (siehe Tab. 2), mit x_2=10 in der Bereichsmitte bei 35°C, x_1=0 und x_3=20 liefert den Zahlenwert **Rq=2.4460 kOhm.**

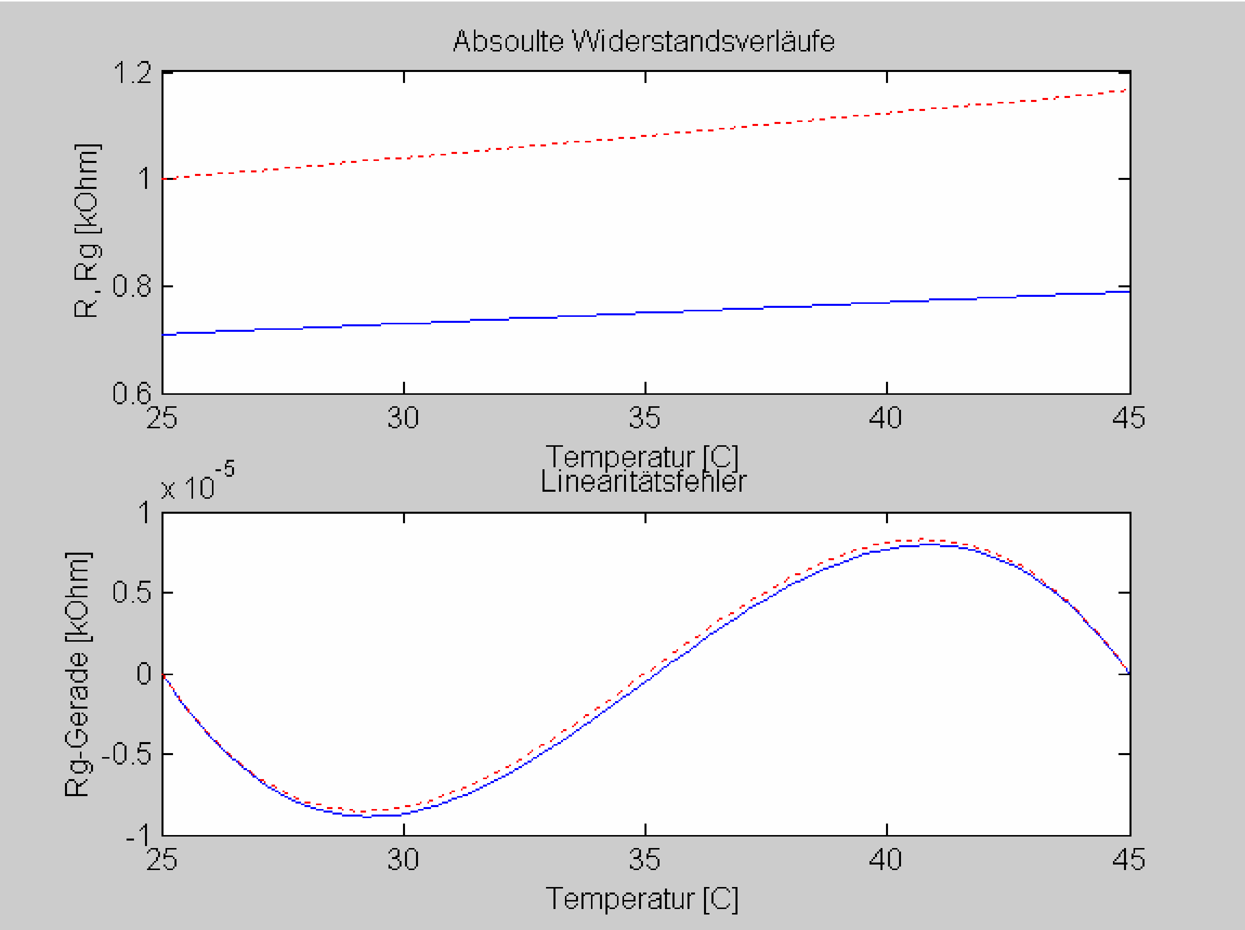

Abb. 2 Verläufe der Temperaturcharakteristika mit dem Verlauf des Sensorwiderstandes R (gestrichelte Linie) und des Gesamtwiderstandes R(x) // Rq (durchgezogene Linie) im oberen Teilbild. Im unteren Teilbild zeigt der gepunktete Verlauf den Linearitätsfehler bei der Dreipunkt Methode und der voll ausgezogen Verlauf den Linearitätsfehler nach der Wendetangentenmethode für R(x) // Rq. Dieser relative Linearitätsfehler entspricht jenem des Verlaufs von U_R(x) nach Abb. 1.

Bei der Wendepunktmethode liegt zwar der Wendepunkt des Verlaufes des Gesamtwiderstandes in der Mitte des Messbereiches, aber dies muss nicht bedeuten, dass bei dieser Temperatur auch der Linearitätsfehler exakt zu NULL wird. Dies gilt nur für die Dreipunktmethode, da dies ja die Annahme für die Formel zur Bestimmung von Rq war - alle drei Punkte liegen auf einer Geraden. Für praktische Bedürfnisse spielt dieser Unterschied jedoch keine Rolle, auch nicht was den maximalen Linearitätsfehler betrifft.

4 Beispiel: Vergleich Dreipunkt mit Wendetangentenmethode für NTC

Es ist ein NTC-Temperatursensor, dessen Widerstandscharakteristik mit einer Exponentialfunktion nach Tab. 1 beschrieben wird, zu linearisieren. Gesucht ist dabei der Linearitätsfehler innerhalb des gewünschten Messbereichs von 35 °C bis 43 °C. Die Koeffizienten des NTC Temperatursensor sind vom Hersteller wie folgt gegeben:

Widerstandswert bei der Referenztemperatur von 25°C (x_0=298.15 K) beträgt R_{25}=1kOhm.

Der Temperaturkoeffizienten B=3528 K.

Die Berechnung von Rq für die Linearisierung nach der **Wendetangentenmethode** liefert entsprechend der Formel nach Tab. 1 mit der Lage des Wendpunkts in der Messbereichsmitte bei 39°C (x=312.15 K), den Wert von **Rq=411.32 Ohm**.

Die Lösung für Rq entsprechend der Linearisierung nach der **Dreipunkt-Methode** (siehe Tab. 2), mit x_2=10 in der Bereichsmitte bei 35°C, x_1=0 und x_3=20 liefert den Zahlenwert **Rq=411.58 Ohm.**

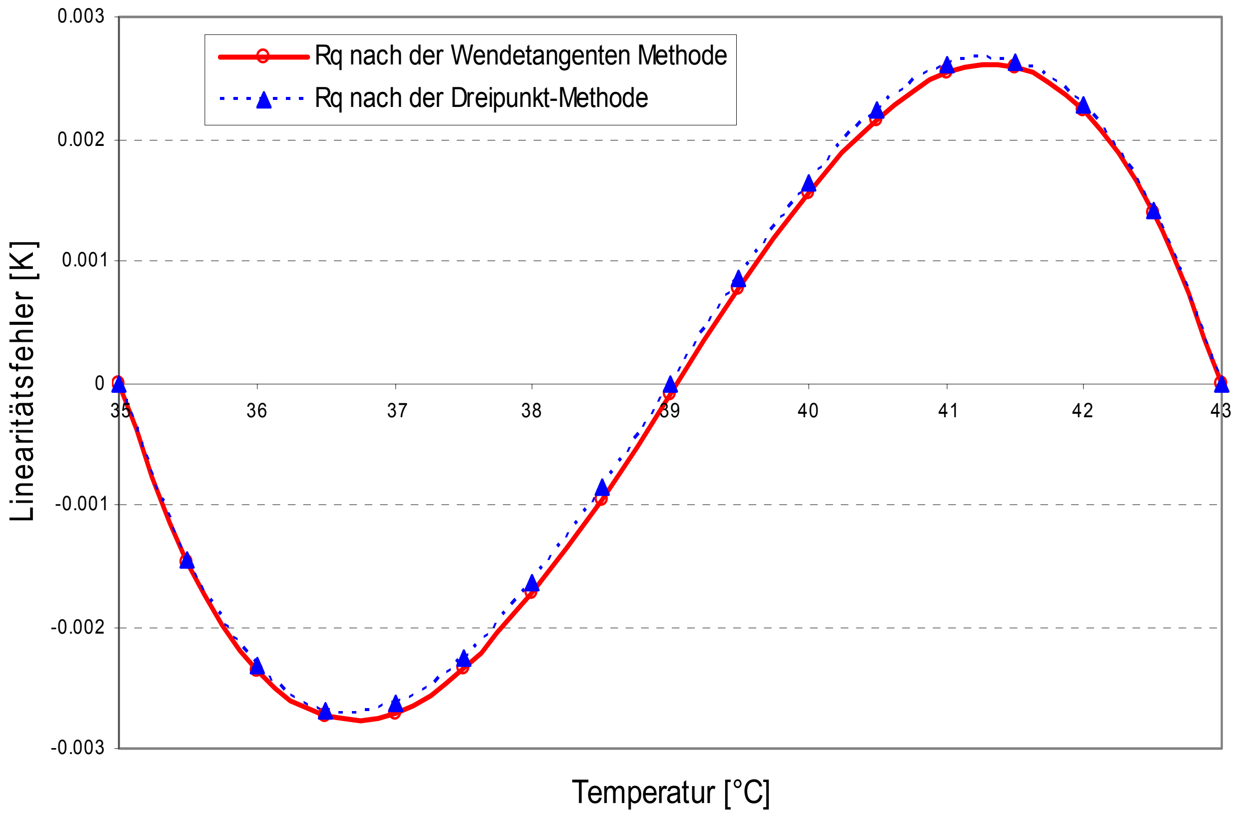

Abb. 3

Verlauf des Linearitätsfehlers des Gesamtwiderstandes R(x) // Rq dargestellt in Grad Kelvin, mit einer mittleren Sensitivität von Rg von 0.278 K/Ohm. Der gepunktete Verlauf zeigt den Linearitätsfehler bei der Dreipunkt-Methode und der voll ausgezogen Verlauf den Linearitätsfehler nach der Wendetangenten-Methode für R(x) // Rq. Dieser relative Linearitätsfehler entspricht jenem des Verlaufs von U_R(x) nach Abb. 1.