Hieraus erhält man: $A = 10$ und $B = -7$. Die Partialbruchzerlegung lautet demnach:

$$\tilde{X}(z) = \frac{10}{z-2} - \frac{7}{z-1}$$

Nun muss wieder mit z multipliziert werden, sodass man

$$X(z) = 10\,\frac{z}{z-2} - 7\,\frac{z}{z-1}$$

erhält. Dies kann man anhand der bereits bekannten Korrespondenz sehr einfach rücktransformieren, sodass man

$$x[k] = 10 \cdot 2^k - 7$$

erhält. □

26.3.2 Rekursive Rücktransformation

Nicht in allen Fällen gelingt eine exakte Rücktransformation einer z-Transformierten, weil u.U. die Partialbruchzerlegung nicht möglich oder zu aufwendig ist, oder aber man ist nur an den numerischen Werte interessiert, nicht aber an der geschlossenen Form der Rücktransformierten. In einem solchen Fall kann auf die rekursive Rücktransformation zurückgegriffen werden. Wohl liefert sie die einzelnen diskreten Werte der Rücktransformierten, aber man erhält keinen geschlossenen Term zur Beschreibung des Resultats.

Für die rekursive Rücktransformation einer Funktion $X(z)$ muss die z-Transformierte zunächst in eine Form wie die folgende gebracht werden:

$$X(z) = \frac{\sum\limits_{i=0}^{N} b_i\, z^i}{\sum\limits_{i=0}^{N} a_i\, z^i} = \frac{b_0 + b_1\, z + b_2\, z^2 + b_3\, z^3 + \ldots + b_N\, z^N}{a_0 + a_1\, z + a_2\, z^2 + a_3\, z^3 + \ldots + a_N\, z^N} \tag{26.33}$$

Die Exponenten von z müssen also allesamt positiv sein. Ist dieser Schritt vollzogen, dann kann die rekursive Rücktransformation mit folgender Vorschrift vorgenommen werden:

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \frac{1}{a_N} \cdot \left(b_{N-k} - \sum\limits_{i=1}^{N} a_{N-i}\, x[k-i] \right) & k \geq 0 \end{cases} \tag{26.34}$$

Hierbei ist N die Anzahl der Koeffizienten. Ist die Anzahl der Koeffizienten a_i verschieden von der Anzahl der Koeffizienten b_i, dann ist das grössere der beiden N zu wählen, also

$$N = \max\{N_a, N_b\} \tag{26.35}$$

Mit dieser rekursiven Rücktransformation ist es nun also möglich, die numerischen Werte der einzelnen Stützstellen einer Funktion im Zeitbereich zu berechnen. Voraussetzung hierfür ist dann allerdings, dass man die vorhergehenden Stützstellen bereits berechnet hat. Werte $x[k]$ für $k < 0$ werden einfach zu 0 angenommen, damit ist dies eine unilaterale Rücktransformation.

Beispiel
Gegeben sei die Funktion

$$X(z) = \frac{2 + 3\, z^{-1} - 6\, z^{-2}}{4 - 8\, z^{-1} + 2\, z^{-2}}$$

im z-Bereich, die nun in den Zeitbereich transformiert werden soll. Es ist also $x[k]$ zu bestimmen. Um dies zu bewerkstelligen, wird der Ausdruck zunächst in die Form gemäss Gleichung 26.33 gebracht. Man erhält so:

$$X(z) = \frac{2\, z^2 + 3\, z - 6}{4\, z^2 - 8\, z + 2}$$

Damit erhält man die Koeffizienten a_i und b_i wie folgt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2 \\ a_1 &= -8 \\ a_2 &= 4 \\ b_0 &= -6 \\ b_1 &= 3 \\ b_2 &= 2 \end{aligned}$$

Des Weiteren beträgt die Anzahl der Koeffizienten $N = 2$. Somit lautet die Vorschrift für die rekursive Rücktransformation:

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k < 0 \\ \frac{1}{a_2} \cdot \left(b_{2-k} - \sum\limits_{i=1}^{2} a_{2-i}\, x[k-i] \right) & k \geq 0 \end{cases}$$

Für die rekursive Rücktransformation erhält man somit nacheinander:

$$\begin{aligned} x[0] &= \frac{1}{a_2} \cdot b_2 &&= \frac{1}{2} \\ x[1] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_1 - a_1\, x[0]) &&= \frac{7}{4} \\ x[2] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_0 - a_1\, x[1] - a_0\, x[0]) &&= \frac{7}{4} \\ x[3] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1\, x[2] - a_0\, x[1]) &&= \frac{21}{8} \\ x[4] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1\, x[3] - a_0\, x[2]) &&= \frac{35}{8} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Man kann das Verfahren beliebig weiterführen und immer mehr Werte berechnen und einfach bei der gewünschten Anzahl Werte abbrechen. □

Beispiel
Hier soll in einem Beispiel noch gezeigt werden, wie das Verfahren funktioniert, wenn die Anzahl der Koeffizienten b_i verschieden ist von derjenigen der Koeffizienten a_i. Gegeben sei die z-Funktion

$$X(z) = \frac{1}{z^2 + 2\,z - 1}$$

und die Koeffizienten heissen damit:

$$\begin{aligned} a_0 &= -1 \\ a_1 &= 2 \\ a_2 &= 1 \\ b_0 &= 1 \\ b_1 &= 0 \\ b_2 &= 0 \end{aligned}$$

Für N ist der Wert 2 zu verwenden. Damit lautet die Rücktransformation:

$$
\begin{aligned}
x[0] &= \frac{1}{a_2} \cdot b_2 && = 0 \\
x[1] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_1 - a_1\, x[0]) && = 0 \\
x[2] &= \frac{1}{a_2} \cdot (b_0 - a_1\, x[1] - a_0\, x[0]) && = 1 \\
x[3] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1\, x[2] - a_0\, x[1]) && = -2 \\
x[4] &= \frac{1}{a_2} \cdot (-a_1\, x[3] - a_0\, x[2]) && = 5 \\
&\vdots
\end{aligned}
$$

Man kann also, wenn die Anzahl der a- und b-Koeffizienten verschieden ist, für N einfach den grösseren der beiden Werte verwenden, wie dies in Gleichung 26.35 gezeigt wird. □

26.4 Gängige z-Transformierte

Zeitbereich	Bildbereich
1	$\frac{z}{z-1}$
a^k	$\frac{z}{z-a}$
a^{k-1}	$\frac{1}{z-a}$
$\delta[k]$	1
$\mathrm{e}^{\alpha\, k}$	$\frac{z}{z-\mathrm{e}^{\alpha}}$
$\cos\omega\, k$	$\frac{z^2 - z\cos\omega}{z^2 - 2\, z\cos\omega + 1}$
$\sin\omega\, k$	$\frac{z\sin\omega}{z^2 - 2\, z\cos\omega + 1}$

Tabelle 26.1. Gängige Korrespondenzen

26.5 Diskretisierung einer Übertragungsfunktion

Oft hat man die Übertragungsfunktion einer Regelstrecke oder eines Filters in kontinuierlicher Form als Laplace-Transformierte gegeben. Zur Implementierung eines entsprechenden Algorithmus muss diese Übertragungsfunktion dann noch diskretisiert werden. Das Problem besteht also im Wesentlichen darin, zu einer gegebenen Laplace-Transformierten eine entsprechende z-Transformierte zu finden, so dass sich bei der Rücktransformation ähnliche Kurven ergeben.

Hierzu gibt es mehrere Methoden. Hier gezeigt werden die bilineare Transformation und die sogenannte Matched z-Transformation.

26.5.1 Matched z-Transformation

Um aus der Laplace-Transformierten die z-Transformierte einer äquivalenten Strecke zu berechnen, geht man wie folgt vor. Gegeben sei eine kontinuierliche Übertragungsfunktion $G(s)$ in der Form

$$G(s) = K \cdot \frac{(s-n_1)\cdot(s-n_2)\cdot\ldots\cdot(s-n_i)}{(s-p_1)\cdot(s-p_2)\cdot\ldots\cdot(s-p_k)}$$

dann sind die Nullstellen die n_i und die Polstellen die p_k, K ist ein konstanter Verstärkungsfaktor. Um die z-Transformierte der diskreten Übertragungsfunktion zu erhalten, werden nun alle Pole und Nullstellen mit der Beziehung $z = \mathrm{e}^{s\,T}$ umgesetzt, wobei für s nacheinander die n_i und die p_k eingesetzt werden. Der Parameter T ist die Abtastperiode.

Das Resultat dieser Transformation ist eine Übertragungsfunktion der Form

$$G(z) = K' \cdot \frac{\left(z-\mathrm{e}^{n_1\,T}\right)\cdot\left(z-\mathrm{e}^{n_2\,T}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\mathrm{e}^{n_i\,T}\right)}{\left(z-\mathrm{e}^{p_1\,T}\right)\cdot\left(z-\mathrm{e}^{p_2\,T}\right)\cdot\ldots\cdot\left(z-\mathrm{e}^{p_k\,T}\right)}$$

wo noch der Verstärkungsfaktor K' unbekannt ist. Dieser kann z.B. durch Vergleich bei einer charakteristischen Frequenz bestimmt werden oder durch Vergleich der Endwerte von $G(s)$ bzw. $G(z)$.

Beispiel
Gegeben sei die Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{1}{s^2 + 0.8\,s + 1}$$

deren zeitdiskretes Äquivalent gesucht wird. Die Abtastperiode sei $T = 0.1\,\mathrm{s}$. Zuerst müssen die Pole bestimmt werden. Die Gleichung lautet

$$s^2 + 0.8\,s + 1 = 0$$

und hat die Lösungen

$$\begin{aligned} s_1 &= -0.40000 + 0.91652\,\mathrm{j} \\ s_2 &= -0.40000 - 0.91652\,\mathrm{j} \end{aligned}$$

Die z-Übertragungsfunktion muss somit die Pole

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{s_1\,T} &= 0.956757 + 0.087935\,\mathrm{j} \\ \mathrm{e}^{s_2\,T} &= 0.956757 - 0.087935\,\mathrm{j} \end{aligned}$$

haben und wird damit

$$G(z) = \frac{K'}{(z - 0.956757 - 0.087935\,\mathrm{j})\cdot(z - 0.956757 + 0.087935\,\mathrm{j})} = \frac{K'}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312}$$

und jetzt muss nur noch die Verstärkung K' bestimmt werden.

Dazu kann beispielsweise der Endwert der Sprungantwort berechnet werden. Bei der gegebenen Übertragungsfunktion ist dieser

$$\lim_{s\to 0} \frac{1}{s^2 + 0.8\,s + 1} = 1$$

und bei der diskretisierten Übertragungsfunktion muss er gleich sein. Er lautet:

$$\lim_{z\to 1} \frac{K'}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312} = \frac{K'}{0.0096025} \stackrel{!}{=} 1$$

und somit muss $K' = 0.0096025$ sein.

Somit lautet die gesamte diskretisierte Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{0.0096025}{z^2 - 1.91351\,z + 0.92312}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abbildung 26.1 dargestellt. □

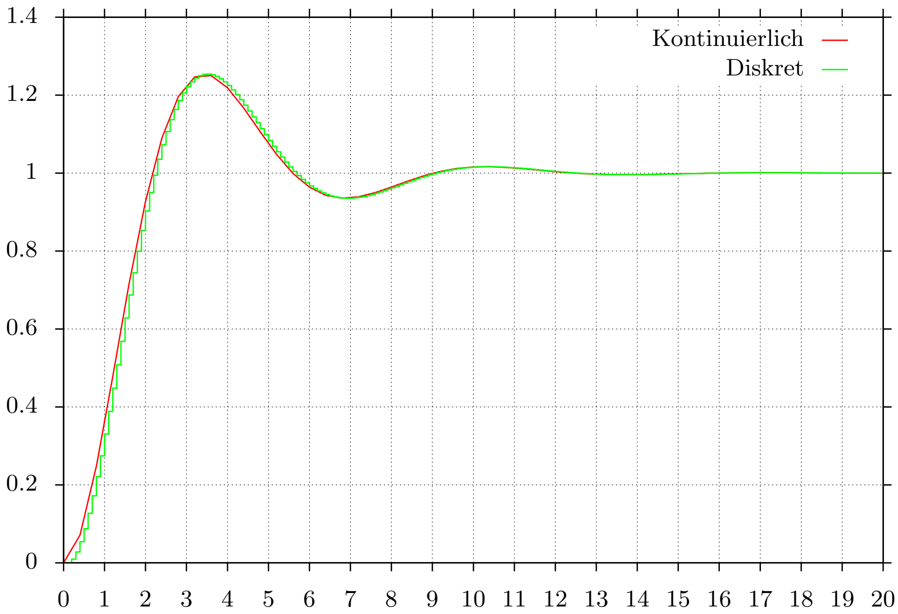

Abb. 26.1. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der Matched z-Transformation

26.5.2 Bilineare Transformation

Die bilineare Transformation wird auch als Möbius-Transformation bezeichnet. Die bilineare Transformation transformiert eindeutig alle Punkte der komplexen s-Ebene in die z-Ebene. Es handelt sich hierbei um eine sogenannte konforme Abbildung, das heisst, das Winkel bei der Transformation erhalten bleiben. Eine Gerade in der s-Ebene wird dabei auf einen Kreis in der z-Ebene abgebildet.

Die bilineare Transformation wird mittels der Rechenvorschrift

$$s = \frac{2}{T} \cdot \frac{z-1}{z+1} \tag{26.36}$$

durchgeführt. Hierbei ist T wieder die Abtastperiode. Auf die Herleitung dieser Beziehung im Detail wird an dieser Stelle verzichtet. Es sei jedoch folgendes erwähnt: ähnlich wie bei der Matched z-Transformation wird $z = \mathrm{e}^{s\,T}$ gesetzt. Hieraus folgt: $s = \frac{1}{T} \ln z$. Anschliessend wird noch eine Reihenentwicklung für den natürlichen Logarithmus vorgenommen (sog. Laurent-Reihen-Entwicklung) und durch Abbrechen der Reihe nach dem ersten Glied erhält man die Beziehung in Gleichung 26.36.

Beispiel
Gegeben sei die kontinuierliche Übertragungsfunktion

$$G(s) = \frac{2}{2\,s^2 + s + 1}$$

und gesucht wird die diskrete Variante.

Mit Hilfe der bilinearen Transformation erhält man durch Einsetzen von Gleichung 26.36 in die kontinuierliche Übertragungsfunktion:

$$G(z) = \frac{\left(2\,z^2 + 4\,z + 2\right)\,T^2}{\left(z^2 + 2\,z + 1\right)\,T^2 + \left(2\,z^2 - 2\right)\,T + 8\,z^2 - 16\,z + 8}$$

Die Abtastperiode sei nun $T = 0.2$ und damit ergibt sich

$$G(z) = \frac{0.08\,z^2 + 0.16\,z + 0.08}{0.04\,z^2 + 0.08\,z + 0.04 + 0.4\,z^2 - 0.4 + 8\,z^2 - 16\,z + 8} = \frac{0.08\,z^2 + 0.16\,z + 0.08}{8.44\,z^2 - 15.92\,z + 7.64}$$

Die Sprungantwort der beiden Übertragungsfunktionen ist in Abbildung 26.2 dargestellt. □

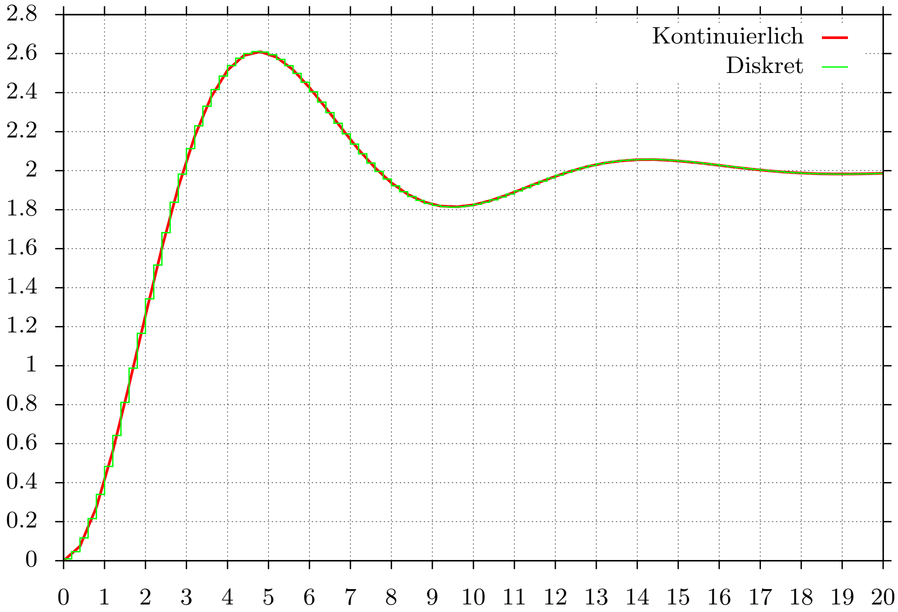

Abb. 26.2. Sprungantwort der kontinuierlichen und der diskretisierten Übertragungsfunktion unter Verwendung der bilinearen Transformation