Messung des Kopplungsfaktors Induktiv Gekoppelter Spulen

Dipl.-Phys. Jochen Bauer

11.8.2013

Zusammenfassung

Induktiv gekoppelte Spulen finden in der Elektrotechnik und insbesondere in der Funktechnik vielfältige Anwendungen. Diese reichen vom Netztransformator über Ausgangsübertrager bis hin zu ZF-Bandfiltern und Antennenkopplungselementen. Die elementaren Kenngrößen zweier induktiv gekoppelter Spulen sind die Induktivitäten der beiden Spulen sowie der Kopplungsfaktor, der die Stärke der gegenseitigen Kopplung beschreibt. Die theoretische Berechnung des Kopplungsfaktor aus der Geometrie der Spulenanordnung ist in der Regel sehr aufwendig und oft nur numerisch durchführbar. Umso wichtiger ist daher die Messung des Kopplungsfaktors einer existierenden Spulenanordnung. In diesem Artikel wird aus den elektrotechnischen Grundgesetzen ein allgemeines Verfahren zur Bestimmung des Kopplungsfaktors für beliebige Spulen hergeleitet. Im Falle von Spulen mit hohem Gütefaktor existiert eine Näherung, die auf eine sehr einfache Formel zur Bestimmung des Kopplungsfaktors führt. Diese Näherung, und ihr genauer Zusammenhang mit der Spulengüte wird ausführlich diskutiert.

Hinweis: Der an der genauen Herleitung der benötigten Gleichungen weniger interessierte Leser kann im folgenden Abschnitt nach der Vorstellung der in Abbildung 1 gezeigten Schaltung direkt zu der weiteren Behandlung des Problems mit Hilfe der komplexen Wechselstromrechnung im Unterabschnitt **Verhalten des Systems bei sinusförmiger Antriebsspannung** springen.

Herleitung der benötigten Gleichungen

Den Ausgangspunkt der Überlegungen bilden zwei induktiv gekoppelte Stromkreise. Die linke Seite (hier als Primärseite definiert) besteht aus einer Spule mit Windungszahl n_1 und Induktivität L_1, deren Anschlussklemmen an einen Wechselspannungsgenerator angeschlossen sind. Der Wechselspannungsgenerator liefert die Spannung $U_1(t)$. Die rechte Seite (hier als Sekundärseite definiert) besteht aus einer Spule mit Windungszahl n_2 und Induktivität L_2 deren Anschlussklemmen über einen Widerstand R verbunden sind. Die Schaltung ist in Abbildung 1 dargestellt.

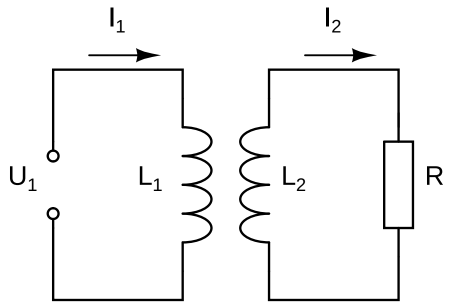

Abbildung 1: Induktiv gekoppelte Stromkreise

Die Differentialgleichungen für den allgemeinen Fall

Die Klemmspannung $U_{L1}(t)$ der Primärspule ist gleich der Generatorspannung $U_1(t)$. Mit dem Induktionsgesetz [1] folgt

$$U_1(t) = U_{L1}(t) = n_1 \frac{d}{dt} \Phi_{1,\text{gesamt}}(t)$$

wobei $\Phi_{1,\text{gesamt}}(t)$ der gesamte magnetische Fluß in der Primärspule ist. Dieser setzt sich zusammen aus dem magnetischen Fluß $\Phi_1(t)$ der vom Strom $I_1(t)$ in der Primärspule erzeugt wird und dem eingekoppelten Anteil $k\Phi_2(t)$ des magnetischen Flusses $\Phi_2(t)$ der Sekundärspule. Dabei ist k der Kopplungsfaktor, um dessen Bestimmung es hier geht. Sinnvollerweise muss sich k im Bereich -1 und 1 bewegen, wobei das Vorzeichen die relative Orientierung des Wicklungssinns der beiden Spulen zueinander angibt. Es ist also

$$\Phi_{1,\text{gesamt}}(t) = \Phi_1(t) + k\Phi_2(t)$$

Der von den Strömen $I_1(t)$ und $I_2(t)$ in der Primär- bzw. Sekundärspule erzeugte magnetische Fluß ist gegeben durch [1]

$$\Phi_1(t) = \frac{L_1 I_1(t)}{n_1} \quad \text{und} \quad \Phi_2(t) = \frac{L_2 I_2(t)}{n_2}$$

Damit ergibt sich nun

$$U_1(t) = U_{L1}(t) = L_1 \dot{I}_1(t) + k \frac{n_1}{n_2} L_2 \dot{I}_2(t) \tag{1}$$

Die Herleitung des Ausdrucks für die Klemmspannung an der Sekundärspule erfolgt völlig analog, also

$$U_{L2}(t) = n_2 \frac{d}{dt} \Phi_{2,\mathrm{gesamt}}(t) = n_2 \frac{d}{dt} \big(\Phi_2(t) + k\Phi_1(t) \big) = L_2 \dot{I}_2(t) + k \frac{n_2}{n_1} L_1 \dot{I}_1(t)$$

Mit dem Maschensatz (2. Kirchhoffsche Regel) folgt für den Sekundärkreis

$$U_{L2}(t) + U_R(t) = U_{L2}(t) + R I_2(t) = 0$$

wobei $U_R(t)$ die Spannung am Widerstand R ist. Einsetzen des Ausdrucks für die Klemmspannung $U_{L2}(t)$ ergibt damit nun

$$k \frac{n_2}{n_1} L_1 \dot{I}_1(t) + L_2 \dot{I}_2(t) + R I_2(t) = 0 \tag{2}$$

Verhalten des Systems bei sinusförmiger Antriebsspannung

Die Gleichungen (1) und (2) stellen einen Satz von gekoppelten gewöhnlichen Differentialgleichungen 1. Ordnung dar, deren allgemeine Behandlung z.B. in [3] beschrieben ist. Hier sind wir jedoch lediglich an der Lösung für das von einer sinusförmigen Spannung $U_1(t)$ angetriebene System im eingeschwungenen Zustand interessiert. Wir können daher mit dem üblichen Ansatz

$$U_1(t) = \hat{U}_1 e^{j\omega t}, \quad I_1(t) = \hat{I}_1 e^{j\omega t} \quad \text{und} \quad I_2(t) = \hat{I}_2 e^{j\omega t}$$

mit der Kreisfrequenz ω und den komplexen Amplituden $\hat{U}_1$, $\hat{I}_1$ und $\hat{I}_2$ arbeiten. Durch einsetzen in (1) und (2) erhält man die Bestimmungsgleichungen

$$j\omega L_1 \hat{I}_1 + j\omega k \frac{n_1}{n_2} L_2 \hat{I}_2 = \hat{U}_1 \tag{3}$$

und

$$j\omega k \frac{n_2}{n_1} L_1 \hat{I}_1 + j\omega L_2 \hat{I}_2 + R\hat{I}_2 = 0 \tag{4}$$

für die komplexen Amplituden. Daraus ergibt sich für den Zusammenhang zwischen $\hat{U}_1$ und $\hat{I}_1$

$$\boxed{\hat{U}_1 = Z\hat{I}_1}$$

mit

$$\boxed{Z = \frac{R\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R^2 + (\omega L_2)^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 k^2 L_1 L_2^2}{R^2 + (\omega L_2)^2}\right)} \tag{5}$$

Dabei stellt Z in einem "Black Box" Modell den komplexen Widerstand dar, der sich dem Wechselspannungsgenerator im Primärkreis darbietet. Dies ist in Abbildung 2 nochmals verdeutlicht.

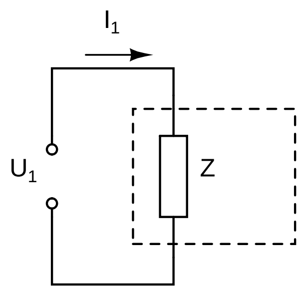

Abbildung 2: Primärkreis im Black Box Modell

Ist im Sekundärkreis der ohmsche Widerstand wesentlich kleiner als der Betrag des Blindwiderstandes der Spule, gilt also $R \ll \omega L_2$ und damit $R^2 + (\omega L_2)^2 \approx (\omega L_2)^2$, so vereinfacht sich dies zu

$$\boxed{Z = R\frac{L_1}{L_2}k^2 + j\left(1 - k^2\right)\omega L_1} \tag{6}$$

Die obige Gleichung geht erwartungsgemäß im Falle einer vollständigen Kopplung ($k = 1$) in die bekannte Transformatorgleichung für Widerstände über.

Der Kopplungsfaktor bei verlustfreien Spulen

Es soll zunächst der einfache Fall von idealen, verlustfreien Spulen betrachtet werden. Eine Formel für den Kopplungsfaktor ergibt sich hier durch folgende Überlegung: Wird zunächst der Sekundärkreis geöffnet ($\hat{I}_2 = 0$), so hat die sekundäre Spule keinen Einfluss mehr auf die Induktivität der primären Spule. Es kann also die im Primärkreis liegende Induktivität L_1 mit den üblichen Methoden gemessen werden. Nun wird die zweite Spule kurzgeschlossen. Da von einer idealen Spule ohne Reihenverlustwiderstand ausgegangen wird, ist in diesem Fall auf der Sekundärseite $R = 0$. In diesem Fall vereinfacht sich Gleichung (5) zu

$$Z = j\left(1 - k^2\right)\omega L_1$$

d.h. auf der Primärseite ist jetzt eine scheinbare Induktivität $L_1' = (1 - k^2)L_1$ zu sehen, die ebenfalls mit den üblichen Methoden gemessen werden kann. Aus den Werten für L_1 und L_1' ergibt sich sofort der Kopplungsfaktor zu

$$\boxed{k = \sqrt{1 - \frac{L_1'}{L_1}}}$$

Diese Gleichung findet sich auch in der entsprechenden Literatur [4], [5] mit dem

Hinweis auf die Gültigkeit für Spulen mit hohem Gütefaktor. Der Kopplungsfaktor als Funktion des Verhältnisses L_1'/L_1 (bzw. $L_{\text{Kurzschluss}}/L_{\text{offen}}$) ist in Abbildung 3 dargestellt. (Danke an Prof. Dietmar Rudolph für die Literaturstellen und die Funktions-Plots).

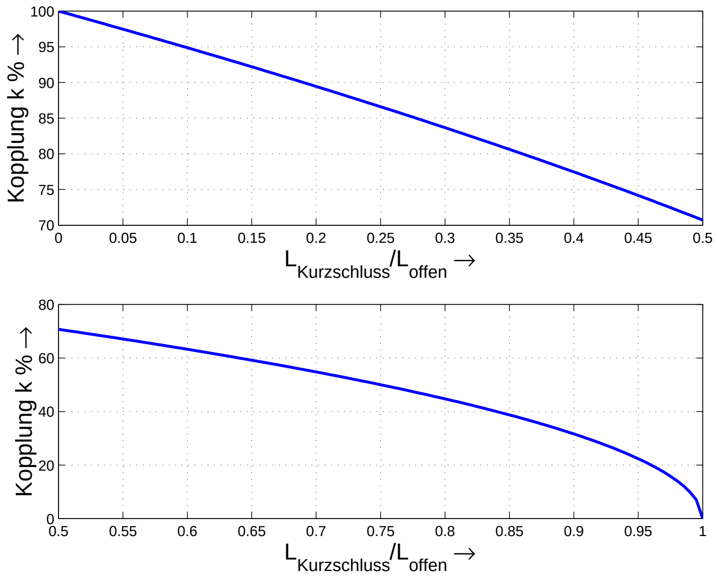

Abbildung 3: Kopplungsfaktor und Verhältnis der Induktivitäten

Im nächsten Abschnitt soll nun die Gültigkeit dieser Gleichung für verlustbehaftete Spulen hoher Güte untersucht werden. Wir sind dabei insbesondere an einer genaueren Aussage, für welche Werte des Gütefaktors die obige Gleichung noch Anwendung finden kann, interessiert.

Verlustbehaftete Spulen hoher Güte

Es soll nun die Situation bei realen, verlustbehaftete Spulen betrachtet werden. Es ist in diesem Fall vorteilhaft, die Spulenverluste durch einen ohmschen Reihenverlustwiderstand zu beschreiben. In diesem Fall wird die reale Spule durch die Reihenschaltung einer idealen (verlustfreien) Spule und einem Reihenverlustwiderstand R_V modelliert. Dies ist in Abbildung (4) gezeigt.

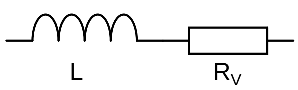

Abbildung 4: Modellierung einer verlustbehafteten Spule

Zur Messung des Kopplungsfaktors wird nun, wie bei der idealen Spule, zunächst der Sekundärkreis geöffnet und die Induktivität L_1 der nunmehr verlustbehafteten Spule im Primärkreis gemessen. Danach wird zu einer weiteren Messung die Sekundärspule kurzgeschlossen. Unter Berücksichtigung der Reihenverlustwiderstände R_{V1} bzw. R_{V2} der Spulen ergibt sich in diesem Fall die in Abbildung 5 gezeigte Ersatzschaltung.

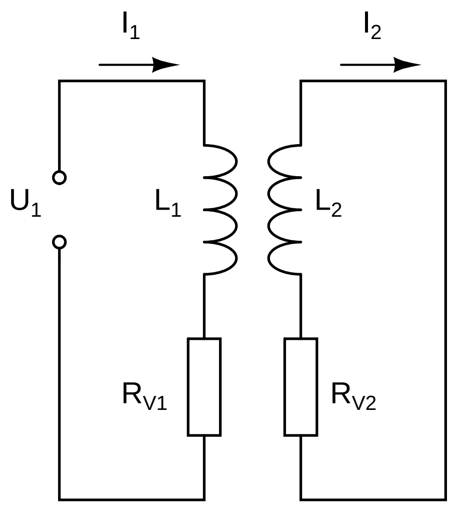

Abbildung 5: Verlustbehaftete gekoppelte Spulen

Der bisher betrachtete Widerstand R auf der Sekundärseite ist nun durch den Reihenverlustwiderstand R_{V2} der Sekundärspule gegeben. Weiterhin ist auf der Primärseite der Reihenverlustwiderstand R_{V1} der Primärspule in Serie geschaltet. Ist der Gütefaktor Q der Spulen hinreichend groß und damit der Reihenverlustwiderstand hinreichend klein, so ist aber $R = R_{\mathrm{V2}} \ll \omega L_2$ und der komplexe Widerstand Z im Primärkreis ist unter Verwendung von Gleichung (6) gegeben durch:

$$Z = R_{\mathrm{V1}} + R_{\mathrm{V2}} \frac{L_1}{L_2} k^2 + j\left(1 - k^2\right) \omega L_1$$

Es zeigt sich, dass die Reihenverlustwiderstände der Spulen sich im Vergleich zum verlustfreien Fall lediglich im Wirkanteil $\mathrm{Re}(Z)$, nicht aber im Blindanteil $\mathrm{Im}(Z)$ auswirken. D.h. bei kurzgeschlossener Sekundärspule tritt im Primärkreis ebenfalls eine scheinbare Induktivität $L_1' = (1 - k^2) L_1$ auf und die Bestimmung des Kopplungsfaktors k erfolgt wiederum über

$$k = \sqrt{1 - \frac{L_1'}{L_1}}$$

Es stellt sich nun berechtigterweise die Frage, bis zu welcher Spulengüte Q die Bedingung $R_{\mathrm{V2}} \ll \omega L_2$ als erfüllt betrachtet werden kann. Da die Spulengüte im Modell aus idealer Spule mit Reihenverlustwiderstand durch [2]

$$Q = \frac{\omega L_2}{R_{\mathrm{V2}}}$$

gegeben ist, ist der Gütefaktor Q bereits ein direktes Maß für die Qualität dieser Näherung. Für Gütefaktoren ab $Q = 50$ ist die obige Methode zur Bestimmung des Kopplungsfaktor sicherlich mit sehr guter Genauigkeit einsetzbar. Es sei an dieser Stelle der Vollständigkeit halber erwähnt, dass der Reihenverlustwiderstand R_{V} einer Spule durch Skin- und Proximity-Effekt in der Regel ebenfalls frequenzabhängig ist, wodurch sich eine im Allgemeinen recht komplizierte Frequenzabhängigkeit des Gütefaktors Q ergibt.

Verlustbehaftete Spulen niedriger Güte

Im Fall einer niedrigen Spulengüte und eines damit verbundenen entsprechend hohen Reihenverlustwiderstandes ist die Annahme $R_{\mathrm{V2}} \ll \omega L_2$ für die Sekundärseite nicht mehr zulässig und Gleichung (6) nicht mehr anwendbar. Die Ermittlung des Kopplungsfaktors k muss nun über die wesentlich kompliziertere aber dafür allgemein gültige Gleichung (5) für den im Primärkreis auftretenden komplexen Widerstandes Z erfolgen. Analog zum vorherigen Abschnitt ergibt sich

$$Z = R_{\mathrm{V1}} + \frac{R_{\mathrm{V2}}\omega^2 k^2 L_1 L_2}{R_{\mathrm{V2}}^2 + (\omega L_2)^2} + j\left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 k^2 L_1 L_2^2}{R_{\mathrm{V2}}^2 + (\omega L_2)^2}\right)$$

Es sei an dieser Stelle erwähnt, dass im obigen Ausdruck sowohl der Realteil (Wirkwiderstand) als auch der Imaginärteil (Blindwiderstand) stets größer null sind. Für den Realteil ist dies sofort offensichtlich, für den Imaginärteil lässt sich dies mit Hilfe von $R_{\mathrm{V2}}^2 + (\omega L_2)^2 > (\omega L_2)^2$ und $k \leq 1$ ebenfalls schnell zeigen.

Es bleibt hier nun nichts anderes übrig, als die in der obigen Gleichung vorkommenden Größen (bis auf den unbekannten Kopplungsfaktor) messtechnisch zu bestimmen und daraus den Kopplungsfaktor k zu berechnen. Dazu kann wahlweise der Realteil oder der Imaginärteil von Z herangezogen werden. Betrachtet man den Imaginärteil

$$X = \mathrm{Im}(Z) = \left(\omega L_1 - \frac{\omega^3 k^2 L_1 L_2^2}{R_{\mathrm{V2}}^2 + (\omega L_2)^2}\right)$$

so ergibt sich durch Auflösen nach k:

$$\boxed{k = \sqrt{\frac{(\omega L_1 - X)(R_{\mathrm{V2}}^2 + (\omega L_2)^2)}{\omega^3 L_1 L_2^2}}}$$

Messtechnisch muss hier also der Blindanteil des im Primärkreis auftretenden komplexen Widerstandes bei kurzgeschlossener Sekundärspule, sowie die Induktivitäten L_1 und L_2 und der Reihenverlustwiderstand R_{V2} der Sekundärspule bei einer vorgegebenen Kreisfrequenz ω bestimmt werden. (Es sei daran erinnert, dass R_{V2} im Allgemeinen frequenzabhängig ist.) Man erhält daraus dann den in diesem Fall frequenzabhängigen Kopplungsfaktor k.

Literatur

[1] http://de.wikipedia.org/wiki/Induktivität

[2] http://de.wikipedia.org/wiki/Gütefaktor

[3] Meyberg, Vachenauer, *Höhere Mathematik II, Springer*, 1991

[4] F. Benz, *Meßtechnik für Funkingenieure, Springer, Wien*, 1952

[5] *ITT: Reference Data for Radio Engineers, 6th ed., Howard & Sams*, 1975