Prof. Dr.-Ing. habil. Jörg Grabow

04.2019

Berechnung einer Plattenbiegung

Voraussetzungen

- Ausdehnung der Platte sind groß gegenüber der Plattendicke h (dünne Platten)
- Querkraftschub gegenüber Biegeeinfluss vernachlässigbar
- Bernoullische Hypothese (ebene Querschnitte)
- keine Änderung der Plattendicke durch Verformung

Stoffgesetze

- homogenes, isotropes, linearelastisches Material

Hilfsgrößen

Laplace-Operator $$\Delta = \sum_{k=1}^{n} \frac{\delta^2}{\delta {x_k}^2}$$

Grundlagen

Verformungsgleichung einer Platte in kartesischen Koordinaten $$K \cdot \Delta\Delta w = p(x, y) - \frac{\Delta M_T}{1-\upsilon}$$

Verformungsgleichung einer Platte in Polarkoordinaten $$K \cdot \Delta\Delta w = p(r, \varphi) - \frac{\Delta M_T}{1-\upsilon}$$

Abkürzungen $$K = \frac{E \cdot h^3}{12\left(1-\nu^2\right)}$$

$$M_T = \int_{\frac{-h}{2}}^{\frac{h}{2}} E \cdot \propto \cdot T \cdot z \, \mathrm{d}z$$

Lösung der Differentialgleichung

1. keine Temperaturdehnung $M_T = 0$

2. konstante Flächenkraftdichte $p(r, \varphi) = p_0$

vereinfachte Dgl. $$\Delta\Delta w = \frac{p_0}{K}$$

homogene Lösung $$w_h = A_0 + B_0 \cdot r^2 + C_0 \cdot ln(r) + D_0 \cdot r^2 \cdot ln(r)$$

keine unendlich großen Schnittgrößen bei r=0 $C_0 = 0 \qquad D_0 = 0$

homogene Lösung $w_h(r) = A_0 + B_0 \cdot r^2$

partikuläre Lösung $w_p(r) = C_{0p} \cdot r^4 = \dfrac{p_0}{64 \cdot K}$

Gesamtlösung $w(r) = \dfrac{p_0}{64 \cdot K} \cdot r^4 + A_0 + B_o \cdot r^2$

Randbedingungen (Einspannung des Umfanges der Kreisscheibe)

1. keine Verformung $w(R) = 0$

2. kein Anstieg $w_{,r}(R) = 0$

1. RB $0 = w(R) = \dfrac{p_0}{64 \cdot K} \cdot R^4 + A_0 + B_o \cdot R^2$

$$A_0 = -\left(B_o \cdot R^2\right) - \frac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K}$$

2. RB $A_0 = \dfrac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K} \qquad B_0 = -\dfrac{p_0 \cdot R^2}{32 \cdot K}$

Biegelinie

$$w(r,\varphi) = \frac{p_0}{64 \cdot K} \cdot r^4 + \frac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K} - \frac{p_0 \cdot R^2}{32 \cdot K} \cdot r^2$$

$$w(r,\varphi) = \frac{p_0 \cdot \left(R^2 - r^2\right)^2}{64 \cdot K}$$

Lösung $w(r,\varphi) = -\dfrac{p_0 \cdot \left(R^2 - r^2\right)^2 \cdot \left(12 \cdot \nu^2 - 12\right)}{64 \cdot E \cdot h^3}$

maximale Verformung $w(r=0,\varphi) = w_{max} = -\dfrac{p_0 \cdot R^4 \cdot \left(12 \cdot \nu^2 - 12\right)}{64 \cdot E \cdot h^3}$

Verformung am Rand $w(r=R,\varphi) = 0$

Beispiele

Materialdaten

E-Modul Acrylglas $E := 3300 \cdot MPa$

Schubmodul Acrylglas $G := 1700 \cdot MPa$

Poissonzahl $\nu := \frac{E}{2 \cdot G} - 1$

maximale Verformung $w_{max}(R, h, p_0) := -\frac{p_0 \cdot R^4 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$

Varianten

Variante 1

Scheibenradius $R := 5\ cm$
Scheibendicke $h := 5 \cdot mm$
Flächenkraftdichte $p_0 := 8\ bar = 0.8\ MPa$

Lösung $w_{max}(R, h, p_0) = 2.271\ mm$

Variante 2

Scheibenradius $R := 5\ cm$
Scheibendicke $h := 6 \cdot mm$
Flächenkraftdichte $p_0 := 8\ bar$

Lösung $w_{max}(R, h, p_0) = 1.314\ mm$

Variante 3

Scheibenradius $R := 5\ cm$
Scheibendicke $h := 10 \cdot mm$
Flächenkraftdichte $p_0 := 8\ bar$

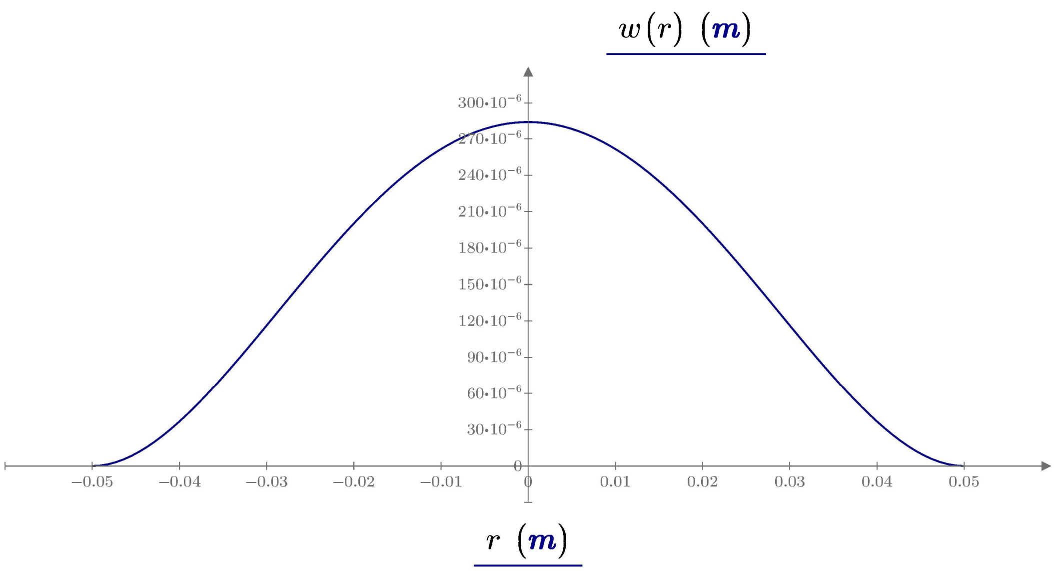
Lösung $w_{max}(R, h, p_0) = 0.284\ mm$

grafische Darstellung der Durchbiegung

Verformungsgleichung $$w(r) := -\frac{p_0 \cdot \left(R^2 - r^2\right)^2 \cdot \left(12 \cdot \nu^2 - 12\right)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

Wertebereich $$r := -50\ mm, -49.1\ mm .. 50\ mm$$

Durchbiegung über Scheibenradius



Korrektur der Näherungsformel

Näherungsgleichung $$w_N = \phi \cdot p_0 \cdot \frac{R^4}{E \cdot h^3}$$

exakte Gleichung $$w_E = -\frac{p_0 \cdot R^4 \cdot \left(12 \cdot \nu^2 - 12\right)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

$$\phi := -\frac{\left(12 \cdot \nu^2 - 12\right)}{64} = 0.187$$

nach Ensslin [1] $$\phi = 0.17$$

[1] Elastizitätslehre für Ingenieure von Prof. Dr.-Ing. Max Ensslin. I Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene, Platten, Torsion, Gekrümmte Träger.