



Berechnung einer Plattenbiegung

Voraussetzungen

- Ausdehnung der Platte sind groß gegenüber der Plattendicke h (dünne Platten)
- Querkraftschub gegenüber Biegeeinfluss vernachlässigbar
- Bernoullische Hypothese (ebene Querschnitte)
- keine Änderung der Plattendicke durch Verformung

Stoffgesetze

- homogenes, isotropes, linearelastisches Material

Hilfsgrößen

Laplace-Operator

$$\Delta = \sum_{k=1}^n \frac{\delta^2}{\delta x_k^2}$$

Grundlagen

Verformungsgleichung einer Platte
in kartesischen Koordinaten

$$K \cdot \Delta \Delta w = p(x, y) - \frac{\Delta M_T}{1 - \nu}$$

Verformungsgleichung einer Platte
in Polarkoordinaten

$$K \cdot \Delta \Delta w = p(r, \varphi) - \frac{\Delta M_T}{1 - \nu}$$

Abkürzungen

$$K = \frac{E \cdot h^3}{12 (1 - \nu^2)}$$

$$M_T = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} E \cdot \alpha \cdot T \cdot z \, dz$$

Lösung der Differentialgleichung

1. keine Temperaturdehnung

$$M_T = 0$$

2. konstante Flächenkraftdichte

$$p(r, \varphi) = p_0$$

vereinfachte Dgl.

$$\Delta \Delta w = \frac{p_0}{K}$$

homogene Lösung

$$w_h = A_0 + B_0 \cdot r^2 + C_0 \cdot \ln(r) + D_0 \cdot r^2 \cdot \ln(r)$$



keine unendlich großen
Schnittgrößen bei $r=0$

$$C_0 = 0 \quad D_0 = 0$$

homogene Lösung

$$w_h(r) = A_0 + B_0 \cdot r^2$$

partikuläre Lösung

$$w_p(r) = C_{0p} \cdot r^4 = \frac{p_0}{64 \cdot K}$$

Gesamtlösung

$$w(r) = \frac{p_0}{64 \cdot K} \cdot r^4 + A_0 + B_0 \cdot r^2$$

Randbedingungen (Einspannung des Umfanges der Kreisscheibe)

1. keine Verformung

$$w(R) = 0$$

2. kein Anstieg

$$w_{,r}(R) = 0$$

1. RB

$$0 = w(R) = \frac{p_0}{64 \cdot K} \cdot R^4 + A_0 + B_0 \cdot R^2$$

$$A_0 = -(B_0 \cdot R^2) - \frac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K}$$

2. RB

$$A_0 = \frac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K} \quad B_0 = -\frac{p_0 \cdot R^2}{32 \cdot K}$$

Biegelinie

$$w(r, \varphi) = \frac{p_0}{64 \cdot K} \cdot r^4 + \frac{p_0 \cdot R^4}{64 \cdot K} - \frac{p_0 \cdot R^2}{32 \cdot K} \cdot r^2$$

$$w(r, \varphi) = \frac{p_0 \cdot (R^2 - r^2)^2}{64 \cdot K}$$

Lösung

$$w(r, \varphi) = -\frac{p_0 \cdot (R^2 - r^2)^2 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

maximale Verformung

$$w(r=0, \varphi) = w_{max} = -\frac{p_0 \cdot R^4 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

Verformung am Rand

$$w(r=R, \varphi) = 0$$



Beispiele

Materialdaten

E-Modul Acrylglas

$$E := 3300 \cdot \text{MPa}$$

Schubmodul Acrylglas

$$G := 1204 \cdot \text{MPa}$$

Poissonzahl

$$\nu := \frac{E}{2 \cdot G} - 1 = 0.37$$

maximale Verformung

$$w_{max}(R, h, p_0) := \frac{p_0 \cdot R^4 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

Varianten

Variante 1

Scheibenradius

$$R := 5 \text{ cm}$$

Scheibendicke

$$h := 5 \cdot \text{mm}$$

Flächenkraftdichte

$$p_0 := 8 \text{ bar} = 0.8 \text{ MPa}$$

Lösung

$$w_{max}(R, h, p_0) = 1.961 \text{ mm}$$

Variante 2

Scheibenradius

$$R := 5 \text{ cm}$$

Scheibendicke

$$h := 6 \cdot \text{mm}$$

Flächenkraftdichte

$$p_0 := 8 \text{ bar}$$

Lösung

$$w_{max}(R, h, p_0) = 1.135 \text{ mm}$$

Variante 3

Scheibenradius

$$R := 5 \text{ cm}$$

Scheibendicke

$$h := 10 \cdot \text{mm}$$

Flächenkraftdichte

$$p_0 := 8 \text{ bar}$$

Lösung

$$w_{max}(R, h, p_0) = 0.245 \text{ mm}$$

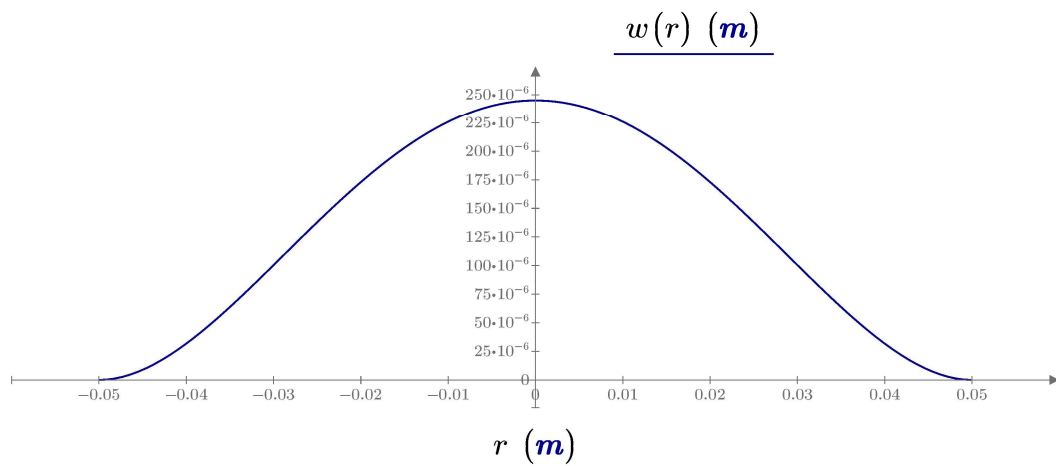


grafische Darstellung der Durchbiegung

Verformungsgleichung
$$w(r) := -\frac{p_0 \cdot (R^2 - r^2)^2 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

Wertebereich
$$r := -50 \text{ mm}, -49.1 \text{ mm}..50 \text{ mm}$$

Durchbiegung über Scheibenradius



Korrektur der Näherungsformel

Näherungsgleichung
$$w_N = \phi \cdot p_0 \cdot \frac{R^4}{E \cdot h^3}$$

exakte Gleichung
$$w_E = -\frac{p_0 \cdot R^4 \cdot (12 \cdot \nu^2 - 12)}{64 \cdot E \cdot h^3}$$

$$\phi := -\frac{(12 \cdot \nu^2 - 12)}{64} = 0.162$$

nach Ensslin [1]

$$\phi := 0.17 \quad h := 5 \text{ mm}$$

$$w_N := \phi \cdot p_0 \cdot \frac{R^4}{E \cdot h^3} = 2.061 \text{ mm}$$

[1] Elastizitätslehre für Ingenieure von Prof. Dr.-Ing. Max Ensslin. I Grundlagen und Allgemeines über Spannungszustände, Zylinder, Ebene, Platten, Torsion, Gekrümmte Träger.



Wertebereich der Korrekturfunktion

Korrekturfunktion $\phi(\nu) := -\frac{(12 \cdot \nu^2 - 12)}{64}$

Wertebereich Poissonzahl $\nu := -1, -0.9 \dots 0.7$

Maximalwert $\phi(0) = 0.188$

