Eulersche Knickkraft

außermittiger Kraftangriff

geometrische Parameter und Materialparameter

Momentengleichgewicht und Dgl. der Biegelinie

Momentengleichgewicht $M_{by}(x) - F(w(x)+e) = 0$

Dgl. Biegelinie $\dfrac{M_{by}}{E \cdot I_y} = -\dfrac{w''}{\left(1+w'^2\right)^{\frac{3}{2}}}$

Voraussetzung: kleine Biegung $\left(1+w'^2\right)^{\frac{3}{2}} = 1$

$$M_{by}(x) = -E \cdot I_y \cdot w''(x)$$

Momentengleichgewicht $M_{by}(x) - F(w(x)+e) = 0$

$$E \cdot I_y \cdot w''(x) + F(w(x)+e) = 0$$

$$w''(x) + \frac{F}{E \cdot I_y} \cdot (w(x)+e) = 0$$

Substitution $u(x) = w(x) + e$

Dgl. $u''(x) + \dfrac{F}{E \cdot I_y} \cdot u = 0$

Lösung der Dgl.

Substitution $\kappa=\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_y}}$

Lösung der Dgl. in u(x) $u(x)=C_1\cdot sin(\kappa\cdot x)+C_2\cdot cos(\kappa\cdot x)$

Lösung der Dgl. in w(x) $w(x)=C_1\cdot sin(\kappa\cdot x)+C_2\cdot cos(\kappa\cdot x)-e$

Randbedingungen x=0, x=l $w=0$

Konstanten aus RB $C_2=e \qquad C_1=e\cdot\frac{1-cos(\kappa\cdot l)}{sin(\kappa\cdot l)}=e\cdot tan\left(\frac{\kappa\cdot l}{2}\right)$

Biegelinie $w(x)=e\cdot\left(tan\left(\frac{\kappa\cdot l}{2}\right)\cdot sin(\kappa\cdot x)+cos(\kappa\cdot x)-1\right)$

Vereinfachung $w(x)=e\cdot\left(\frac{cos\left(\kappa\cdot\left(\frac{l}{2}-x\right)\right)}{cos\left(\kappa\cdot\frac{l}{2}\right)}-1\right)$

maximale Durchbiegung bei x=l/2 $w_{max}=e\cdot\left(\frac{1}{cos\left(\kappa\cdot\frac{l}{2}\right)}-1\right)$

für maximale Durchbiegung
cos($\kappa\cdot\frac{l}{2}$) gegen null $\kappa\cdot\frac{l}{2}=\frac{\pi}{2} \qquad \sqrt{\frac{F_k}{E\cdot I_y}}\cdot\frac{l}{2}=\frac{\pi}{2}$

Knickkraft $F_k=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_y}{l^2}$

Interpretation der Lösung

Umformungen $\kappa=\sqrt{\frac{F}{E\cdot I_y}} \qquad F_K=\frac{\pi^2\cdot E\cdot I_y}{l^2}$

$$E\cdot I_y=\frac{F_K\cdot l^2}{\pi^2}$$

$$\kappa=\sqrt{\frac{F}{\frac{F_K\cdot l^2}{\pi^2}}}=\frac{\pi}{l}\cdot\sqrt{\frac{F}{F_K}}$$

maximale Durchbiegung $$w_{max} = e \cdot \left(\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\frac{F}{F_K}}\right)} - 1 \right)$$

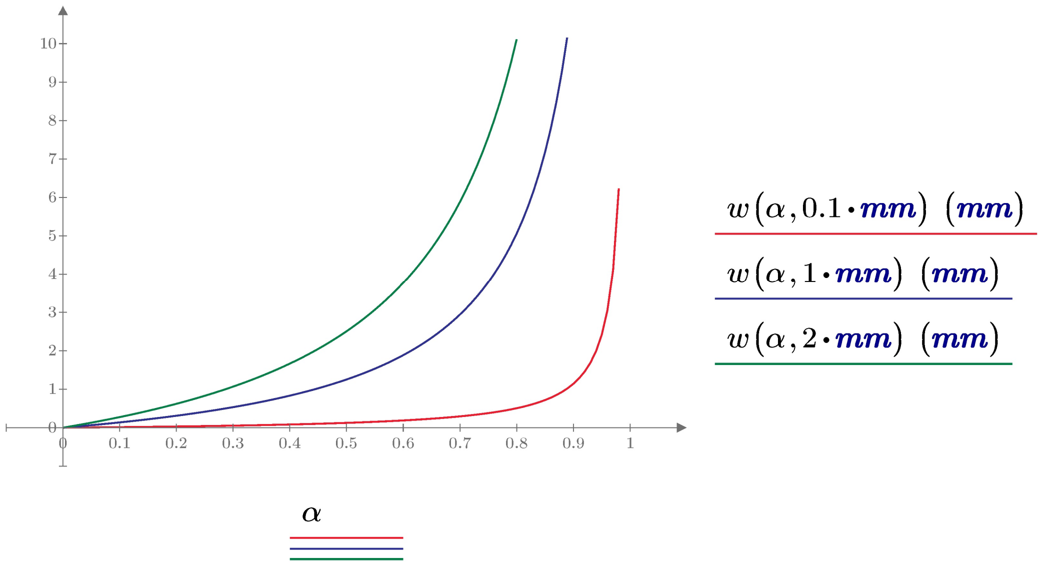
Substitution $$\alpha = \frac{F}{F_K}$$

maximale Durchbiegung $$w_{max}(\alpha) = e \cdot \left(\frac{1}{cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\alpha}\right)} - 1 \right)$$

Interpretation der Lösung

Kräfteverhältnis $$\alpha := 0, 0.01 .. 0.98$$

$$w\left(\alpha, e_y\right) := e_y \cdot \left(\frac{1}{\cos\left(\frac{\pi}{2} \cdot \sqrt{\alpha}\right)} - 1 \right)$$



Beispiel

Stablänge $l_S := 500\ mm$

Stabbreite $b := 12.7\ mm$

E-Modul $E := 200 \cdot GPa$

Knickkraft $F_k := 2\ N$

$$F_k = \frac{\pi^2 \cdot E \cdot I_y}{l^2} \qquad I_y = \frac{b \cdot h^3}{12}$$

Balkenhöhe $h := \left(\dfrac{12 \cdot F_k \cdot {l_S}^2}{E \cdot b \cdot \pi^2}\right)^{\frac{1}{3}} = 0.621\ mm$

$$I_y := \frac{b \cdot h^3}{12} = \left(2.533 \cdot 10^{-13}\right)\ m^4$$

axiale Biegekraft $F_b := 1.98\ N \quad \kappa := \sqrt{\dfrac{F_b}{E \cdot I_y}} = 6.252\ \dfrac{1}{m}$

Exzentrizität $e := 0.1\ mm \quad x := 0\ mm, 1\ mm .. l_S$

$$w(x) := e \cdot \left(\frac{\cos\left(\kappa \cdot \left(\frac{l_S}{2} - x\right)\right)}{\cos\left(\kappa \cdot \frac{l_S}{2}\right)} - 1\right)$$