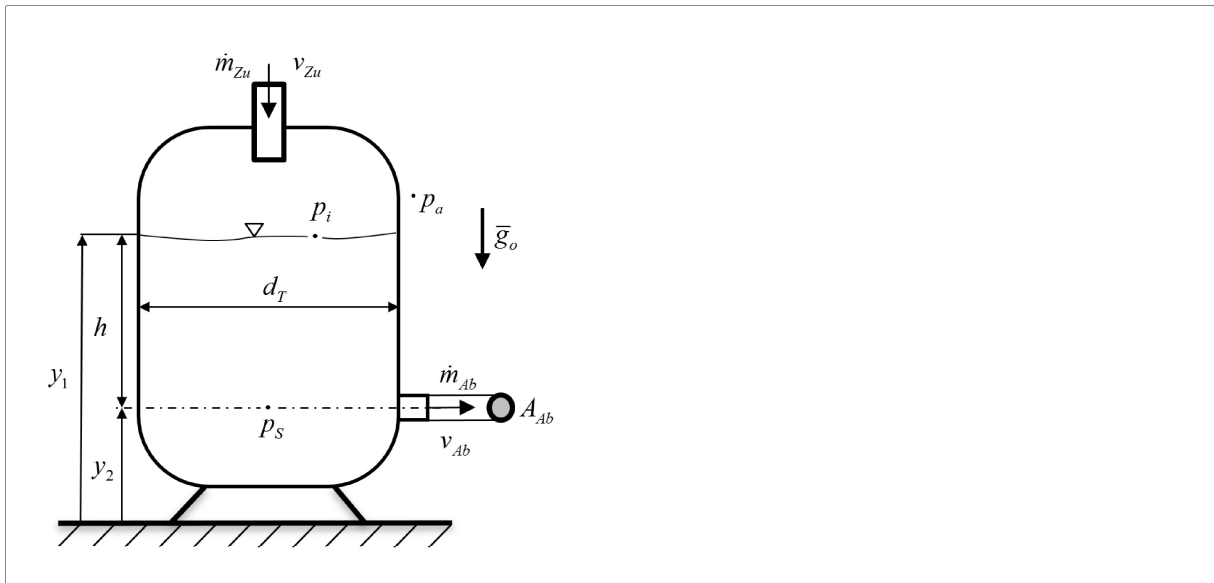


Modellbildung mechatronischer Systeme (MMS)

Hydraulik

Wassertank

Skizze



Annahmen

Bei der Berechnung des Widerstandes gelten die folgenden Voraussetzungen:

- konstante Fluiddichte
- konstante Erdbeschleunigung

Modelle

hydraulische Kapazität mit nichtlinearem hydraulischen Widerstand

Eingaben

Parameter des Tank

Tankdurchmesser

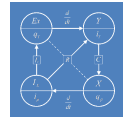
$$d_T := 1 \cdot m$$

Abflussdurchmesser

$$d_{Ab} := 2 \cdot cm$$

Fluiddichte

$$\rho_F := 1000 \cdot \frac{kg}{m^3}$$



Lösungen

1. nichtlinearer Widerstand durch das Abflussverhalten

Bernoulli-Gleichung
$$g \cdot y_1 + \frac{p_i}{\rho_F} + \frac{v_{zu}^2}{2} = g \cdot y_2 + \frac{p_a}{\rho_F} + \frac{v_{Ab}^2}{2}$$

Kontinuitätsgleichung
$$v_{Zu} \cdot A_T = v_{Ab} \cdot A_{Ab}$$

Flächenverhältnis
$$n = \frac{A_{Ab}}{A_T}$$

Zufluss
$$v_{Zu} = v_{Ab} \cdot n$$

Bernoulli-Gleichung
$$g \cdot y_1 + \frac{p_i}{\rho_F} + \frac{v_{Ab}^2 \cdot n^2}{2} = g \cdot y_2 + \frac{p_a}{\rho_F} + \frac{v_{Ab}^2}{2}$$

Höhendifferenz im Tank
$$h = y_1 - y_2$$

Druckdifferenz im Tank
$$\Delta p = p_i - p_a$$

Ablussgeschwindigkeit
$$v_{Ab} = \sqrt{\frac{2 \left(g \cdot h - \frac{1}{\rho_F} \Delta p \right)}{1 - n^2}}$$

Massenstrom am Abfluss
$$\frac{d}{dt} m_{Ab} = \rho_F \cdot A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \left(g \cdot h - \frac{1}{\rho_F} \Delta p \right)}{1 - n^2}}$$

Annahme offener Tank
$$\Delta p = 0$$

$$\frac{d}{dt} m_{Ab} = \rho_F \cdot A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{g \cdot h}$$

Zusammenhang zwischen Flussgröße und Potentialgröße
$$I_X = \rho_F \cdot A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{Y}$$

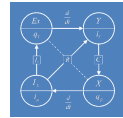
nichtlineares Gesetz
$$Y = R_{NL} \cdot I_X^2$$

nichtlinearer Widerstand
$$R_{NL} = \frac{1 - n^2}{2 \cdot A_{Ab}^2 \cdot \rho_F^2}$$

mechatronische Bauelemente

hydraulische Kapazität
$$C_h = \frac{A_T \cdot \rho_F}{g}$$

hydraulischer Widerstand
$$R_1 = \frac{1 - n^2}{2 \cdot \rho_F^2 \cdot A_{Ab}^2}$$



Abflussverhalten $h(t)$

Füllstand $h(t)$ bestimmen

$$m_{Ab}' = \rho_F \cdot A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{h}$$

$$m_{Ab}' = -m_T' = -\rho_F \cdot A_{Ab} \cdot h'(t)$$

Dgl.

$$\rho_F \cdot A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{h} = -\rho_F \cdot A_{Ab} \cdot h'(t)$$

nichtlineare homogene Dgl.
erster Ordnung

$$A_{Ab} \cdot h'(t) + A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{h} = 0$$

Lösung der Dgl. numerisch

Tankfläche

$$A_T := \frac{\pi}{4} \cdot d_T^2$$

Abflussfläche

$$A_{Ab} := \frac{\pi}{4} \cdot d_{Ab}^2$$

Flächenverhältnis

$$n := \frac{A_{Ab}}{A_T}$$

Zeit für die Dgl.-Lösung

$$t_e := 800 \cdot s$$

$$AB: \quad h_0 := 1 \cdot m$$

Gleichungslösungsbibliothek

Differentialgleichung

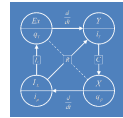
$$A_T \cdot h'(t) + A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{h(t)} = 0$$

Anfangsbedingung

$$h(0) = 1 \cdot m$$

numerische Lösung der Dgl.

$$h := \text{odesolve}(h(t), t_e)$$

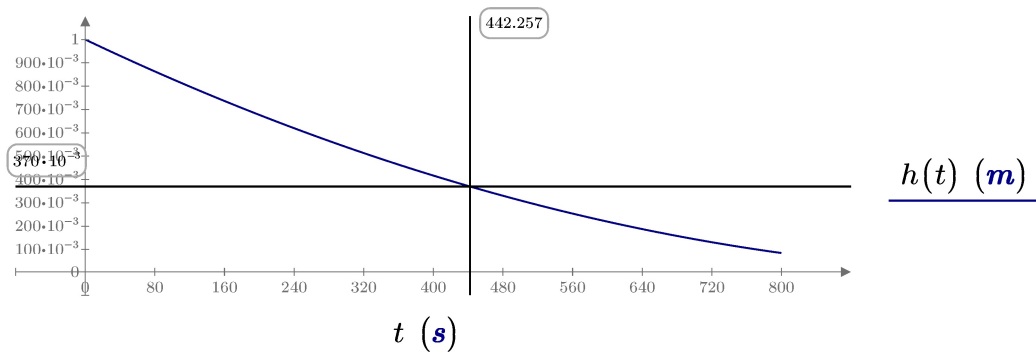


grafische Darstellung der numerischen Lösung

Abflusszeit für 63% des Tankinhaltes $t_{63} := 442.257 \cdot s$

noch verbleibender Füllstand $h(t_{63}) = 0.37 \text{ m}$

Zeit $t := 0, 1 \cdot s \dots t_e$



analytische Lösung

Differentialgleichung

$$A_T \cdot h'(t) + A_{Ab} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot \sqrt{h(t)} = 0$$

Trennung der Variablen

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = \frac{-A_{Ab}}{A_T} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}} \cdot dt$$

Abkürzung

$$a = \frac{A_{Ab}}{A_T} \cdot \sqrt{\frac{2 \cdot g}{1 - n^2}}$$

unbestimmte Integration

$$\int \frac{1}{\sqrt{h}} dh = -a \cdot \int 1 dt$$

Lösung des Integrals

$$2 \cdot \sqrt{h} = -a \cdot t + C_1$$

allgemeine Lösung

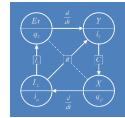
$$h(t) = \left(\frac{C_1}{2} - \frac{a \cdot t}{2} \right)^2$$

Anfangsbedingung zur Bestimmung der Integrationskonstanten

$$h(t=0) = h_0$$

$$h_0 = \left(\frac{C_1}{2} - \frac{a \cdot 0}{2} \right)^2$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} 2 \cdot \sqrt{h_0} \\ -2 \cdot \sqrt{h_0} \end{bmatrix}$$



Konstante

$$a := \frac{A_{Ab}}{A_T} \cdot \sqrt{\frac{2g}{1-n^2}}$$

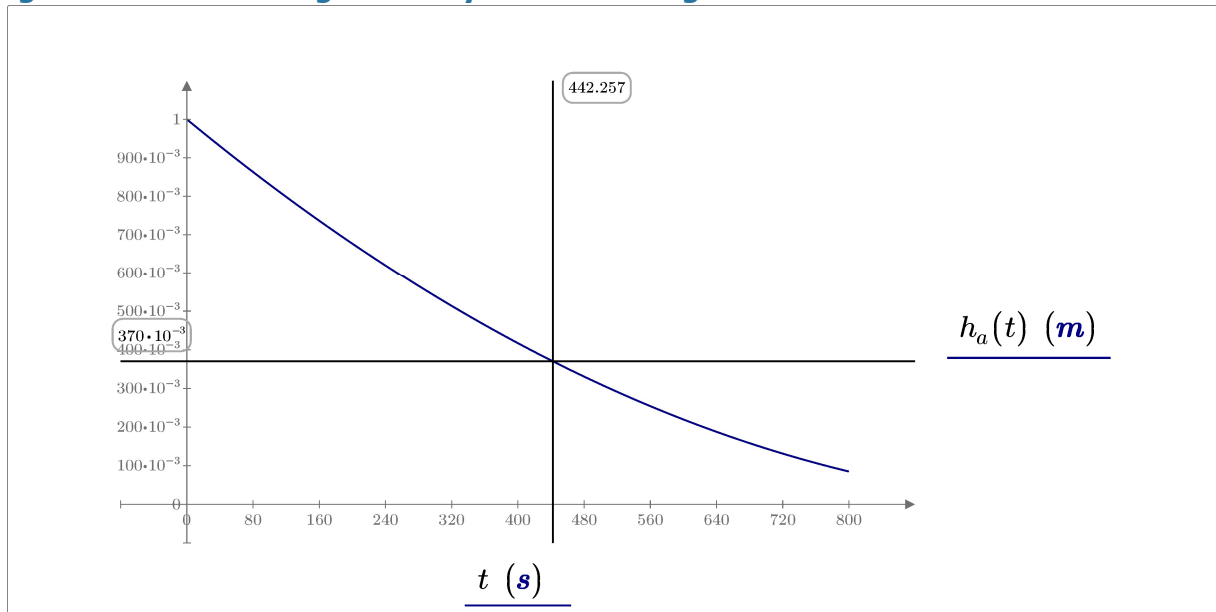
analytische Lösung der Dgl.

$$h_a(t) := \left(\sqrt{h_0} - \frac{a}{2} \cdot t \right)^2$$

Abflusszeit

$$t_{63} := \frac{2 \cdot (\sqrt{h_0} - \sqrt{0.37 h_0})}{a} = 442.257 \text{ s}$$

grafische Darstellung der analytischen Lösung



Bestimmung der mechatronischen Bauelemente

hydraulische Kapazität

$$C_h := \frac{A_T \cdot \rho_F}{g} = 80.0883 \frac{\text{kg} \cdot \text{s}^2}{\text{m}^2}$$

hydraulischer Widerstand

$$R_1 := \frac{1-n^2}{2 \cdot \rho_F^2 \cdot A_{Ab}^2} = 5.0661 \frac{\text{m}^2}{\text{kg}^2}$$